LIMITE

MANUEL LOPEZ MATEOS

MANUEL LOPEZ MATEOS

LIMITE

1973
Programa Nacional de Formación de Profesores
ASOCIACION NACIONAL DE UNIVERSIDADES E INSTITUTOS DE
ENSEÑANZA SUPERIOR

Primera edición: México, 1973

Av. M. A. Quevedo 8-4º piso
Apdo. Postal 70-230
México 20, D. F.

Diseño de la Portada:
Javier Espinoza y Javier Fragoso

Edición a cargo de:
DISEÑO Y COMPOSICION LITOGRAFICA, S. A.
Blv. M. Avila Camacho Nº 40-316
Naucalpan, Edo. de México
557-63-74
557-62-63

Impreso en México

Printed in Mexico

PRESENTACION

Esta publicación forma parte de la Serie TEMAS BASICOS, preparada por la Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior. En cada una de las áreas de Matemáticas, Ciencias Naturales, Historia y Ciencias Sociales, *y* Lengua y Literatura, *la Serie ofrece los temas vertebrales de los cursos correspondientes en el nivel de enseñanza preparatoria o bachillerato. Algunos de los temas serán útiles también como auxiliares para repaso en el inicio del ciclo profesional o como fuente de conocimiento para el lector autodidacta.*

Dentro de la intención didáctica con que han sido elaborados los materiales, cabe destacar los propósitos de claridad, concisión y, en la medida de lo posible, desarrollo autónomo de los temas. En cada caso, se han incorporado al texto ejemplos, preguntas o ejercicios. En ocasiones, las preguntas o los ejercicios se acompañan de sus correspondientes resoluciones. Se recomienda que el lector intente su propia respuesta, antes de ver la que el autor ofrece.

Excepto en el área de Historia y Ciencias Sociales, *en donde se utilizaron trabajos de autores extranjeros, en el resto se contó con la valiosa intervención de destacados científicos e intelectuales mexicanos. La coordinación general de la Serie estuvo a cargo del señor Lic. Hugo Padilla. Los señores doctores Emilio Lluis, Francisco Medina Nicolau, Romeo Flores y Luis Rius, coordinaron, respectivamente, las áreas de* matemáticas, ciencias naturales, historia y ciencias sociales, *y* lengua y literatura.

LIC. ALFONSO RANGEL GUERRA
SECRETARIO GENERAL EJECUTIVO

ASOCIACION NACIONAL DE UNIVERSIDADES
E INSTITUTOS DE ENSEÑANZA SUPERIOR

I N D I C E

Introducción

El propósito de este trabajo es aclarar el concepto de límite. El lenguaje que utilizaremos está debidamente expuesto en el folleto de *Funciones Reales*.

Proponemos que el párrafo I — 3 y los ejercicios al final de cada párrafo sean material de investigación que pueden repartirse en grupos de trabajo. Sugerimos al maestro coordinar a los diversos grupos de trabajo, más que participar en ellos.

Este folleto debe leerse despacio y discutirse. Ayudará tener papel y lápiz a la mano.

Las aplicaciones naturales (derivada e integración) serán tratados en folletos aparte.

M. L.M.

1. LIMITE

Todas las funciones de que se hable tendrán como dominio y contradominio a **R**, a menos que se indique lo contrario; además, utilizaremos la expresión "función" para la función misma, su regla de correspondencia o su gráfica. Creemos que el contexto evitará cualquier confusión.

1.1 El significado de $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

La expresión $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, se lee "el límite de f de x es infinito cuando x tiende a infinito" o "f de x tiende a infinito cuando x tiende a infinito".

Antes de discutir el significado que los matemáticos dan a $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, trataremos de aclarar el conocimiento intuitivo que, indudablemente, cada uno tiene de la expresión en cuestión. Esto nos pondrá en condiciones de entender el concepto, que no es otra cosa que la formalización del conocimiento intuitivo.

Todos estamos de acuerdo con que si nos piden dibujar la gráfica de una función que tenga como límite ∞ cuando x tiende a ∞, dibujaríamos algo así:

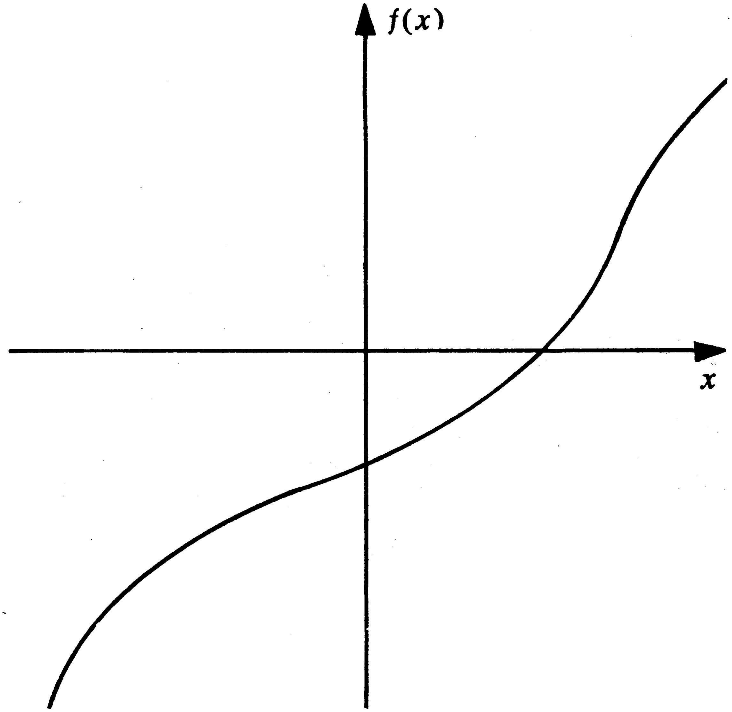

FIG. IV-1 (a)

Esto es, daríamos como definición la siguiente:

El límite de una función es ∞ cuando x tiende a ∞, si a valores cada vez más grandes de x, corresponden valores cada vez más grandes de $f(x)$.

Ciertamente, la función de la Fig. IV-1 (a) cumple con esta "definición".

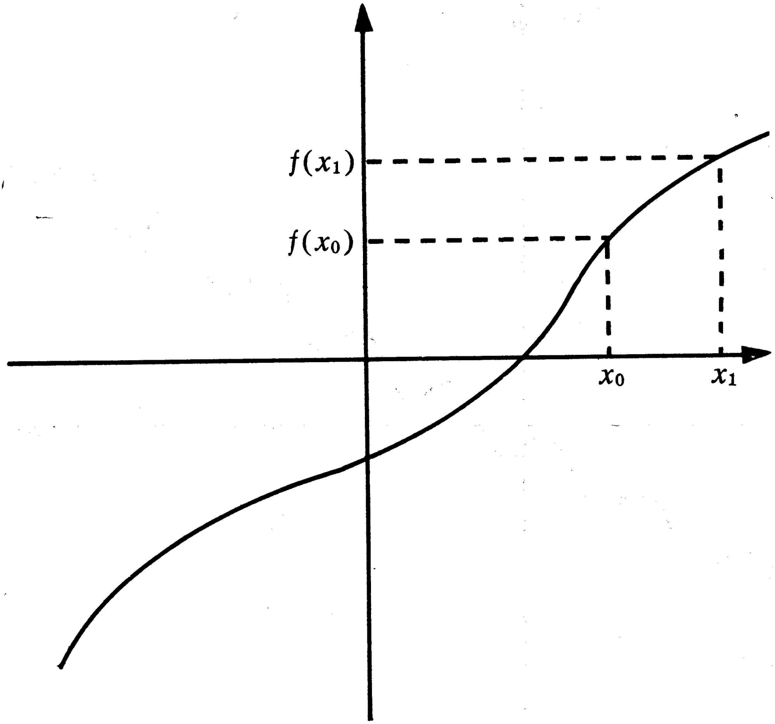

FIG. IV-1 (b)

Si consideramos *cualquier* punto x_0 en el dominio, resulta que *a cada* $x_1 > x_0$ corresponde un valor $f(x_1) > f(x_0)$.

Sin embargo, con esta definición hemos dejado a un lado funciones como la siguiente:

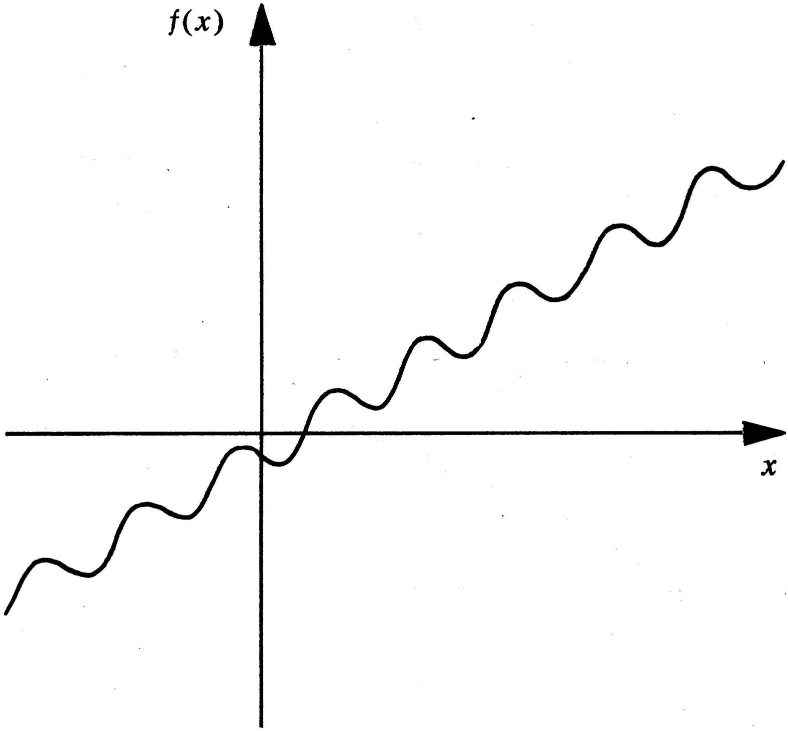

FIG. IV-2 (a)

Cada lector estará de acuerdo con que esta función también tiende a ∞ cuando x tiende a ∞.

Esta función se ha dejado a un lado, porque no cumple la definición que hasta ahora hemos adoptado para $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

No la cumple porque hay valores, llamémosle a alguno de ellos x_0, para los que *algún* punto $x_1 > x_0$, no les corresponde $f(x_1) > f(x_0)$, como lo muestra la figura IV-2 (b).

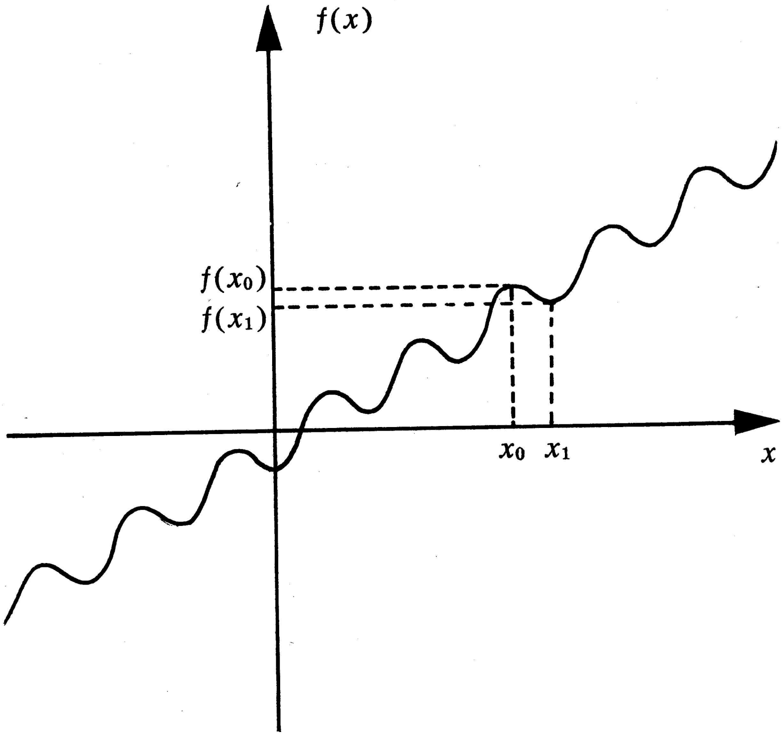

FIG. IV-2 (b)

Podemos decir que hay puntos a la *derecha* de x_0, a los cuales les corresponden puntos *abajo* de $f(x_0)$. Sin embargo, la función ¡tiende a ∞ cuando x tiende a ∞!

Tratemos de mejorar nuestra definición. Podríamos decir: $f(x)$ tiende a ∞ cuando x tiende a ∞, si *a partir de un punto* x_0 en el dominio, todos los puntos a la derecha toman *valores mayores* que $f(x_0)$.

Según esta definición, las funciones de las figuras IV-1 (a) y IV-2 (a) tienden a ∞ cuando x tienden a ∞. El inconveniente de la definición es que "deja tender a ∞" a demasiadas funciones. La función de la figura IV-3 cumple con la definición propuesta y, sin embargo, algo nos dice que no tiende a ∞ cuando x tiende a ∞ (cuando más, tenderá a L).

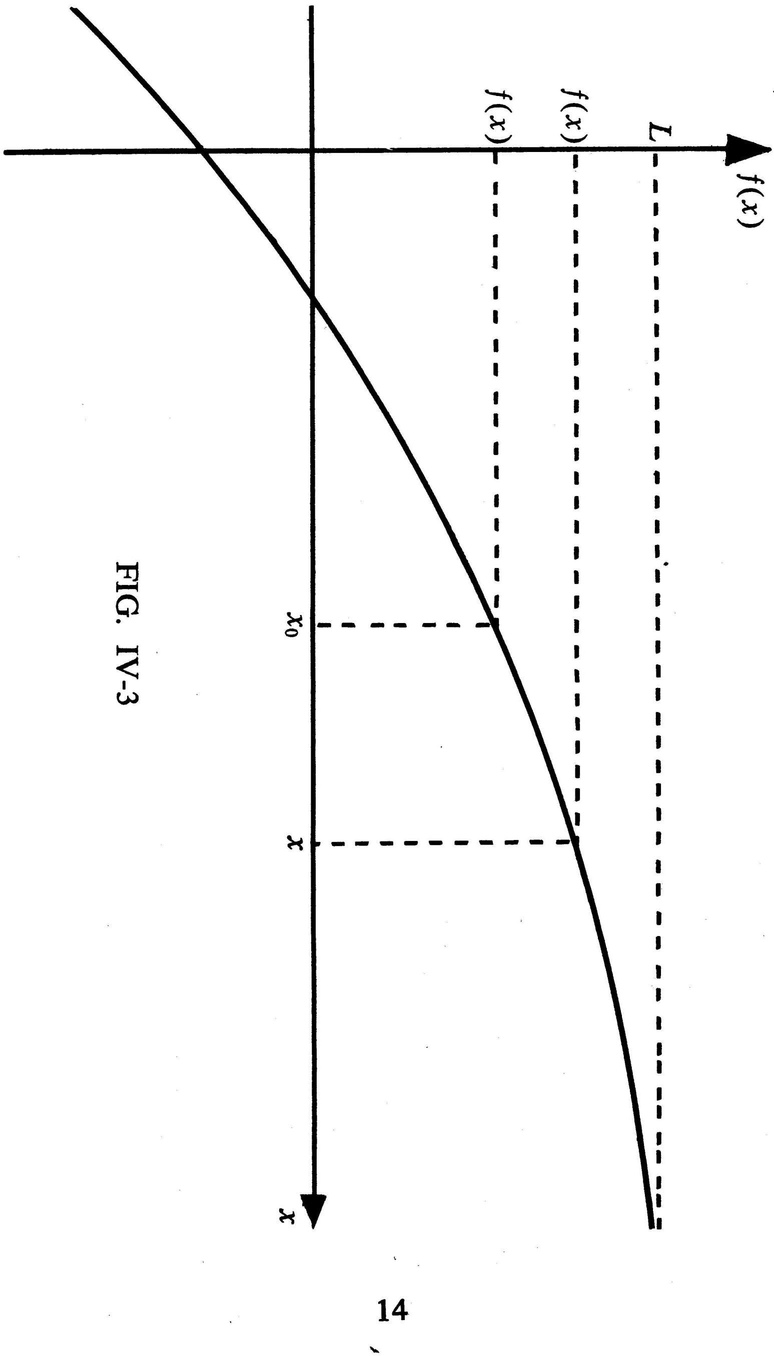

FIG. IV-3

Parece que un mejor enfoque consiste en pensar una función que tiende a ∞ cuando x tiende a ∞, como una que a partir de cierto punto *suba tanto como queramos.*

Pero, ¿qué quiere decir que suba tanto como queramos?, pues que alcance valores mayores que cualquier número M prefijado, sin importar lo grande que éste sea. "A partir de cierto punto", quiere decir que existe un número N, que depende del valor de M, tal que a los números a la derecha de N, les corresponden valores mayores que el número M prefijado.

Proponemos entonces la siguiente definición: El límite de $f(x)$ es ∞ cuando x tiende a ∞, si para *cualquier* número M (tan grande como se quiera) existe *algún* número N (que depende del valor de M) tal que si $x > N$ entonces, $f(x) > M$.

Las siguientes figuras aclararán la definición.

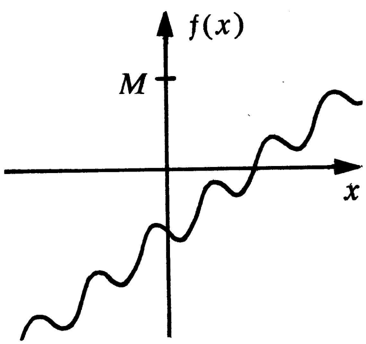

FIG IV-4 (a)

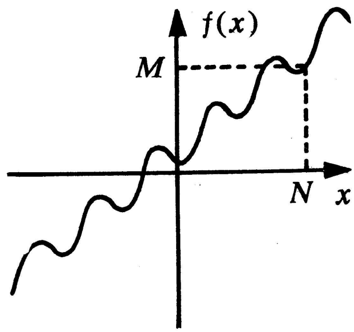

FIG. IV-4 (b)

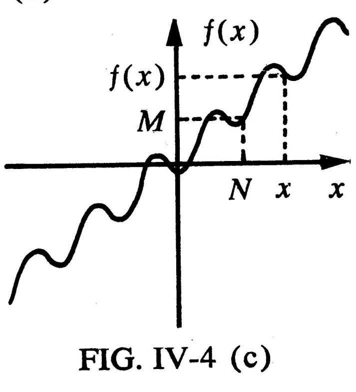

FIG. IV-4 (c)

Esta definición "impide" que la función de la Fig. IV-3 tienda a ∞ cuando x tiende a ∞, porque podemos encontrar a lo menos una M; p. ej. $M = L + 1$, de manera que *no hay* un cierto punto N tal que los puntos a la derecha de N tomen valores arriba de $L + 1$. Es decir, los puntos a la derecha de *cualquier* N toman valores abajo de $L + 1$.

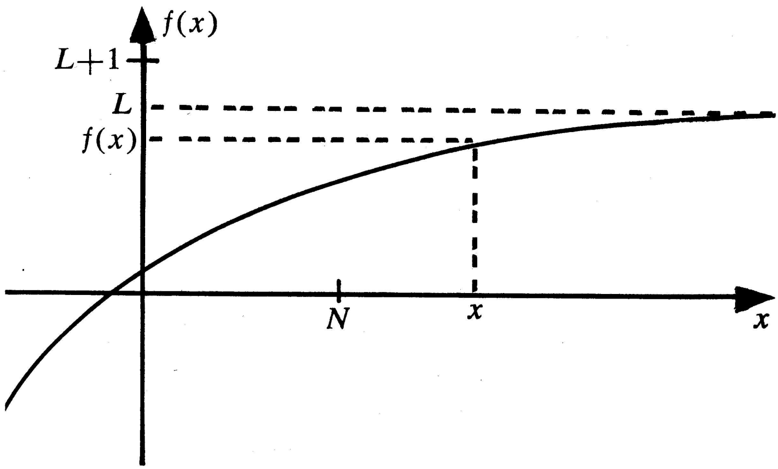

FIG. IV-5

Pues sí, la definición propuesta es el significado que los matemáticos dan a $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Daremos la versión formal:

Si f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ diremos que $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, si y sólo si para toda M existe N tal que si $x > N$ entonces $f(x) > M$.

En este momento, sugerimos al lector que dibuje funciones y diga, basándose en la definición, si tienden o no a ∞ cuando x tiende a ∞.

Veamos algunos ejemplos concretos.

a) Sea f la función *idéntica* de **R** es decir f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = x$

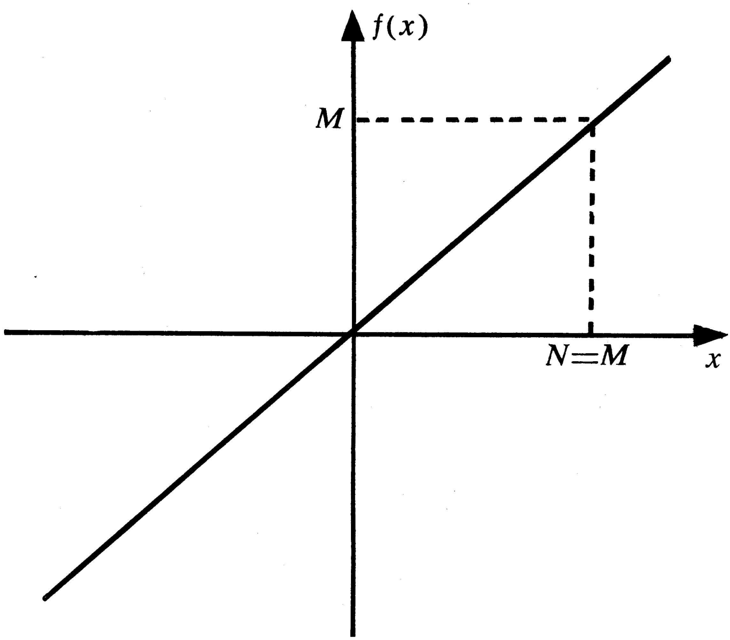

FIG. IV-6

$\lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$, porque, si damos M arbitrario en el contra-dominio, tomaremos $N = M$. Vemos que, si $x > N = M$, entonces $f(x)$, que es x, es mayor que M.

b) Sea g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $g(x) = x^2$.
$\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty$, porque, si damos M arbitrario, basta con

que hagamos $N = +\sqrt{M}$ para que, si $x > N$, o sea, $x > +\sqrt{M}$, entonces, elevando al cuadrado ambos miembros de la desigualdad, $x^2 > M$; pero $x^2 = g(x)$, es decir, $g(x) > M$.

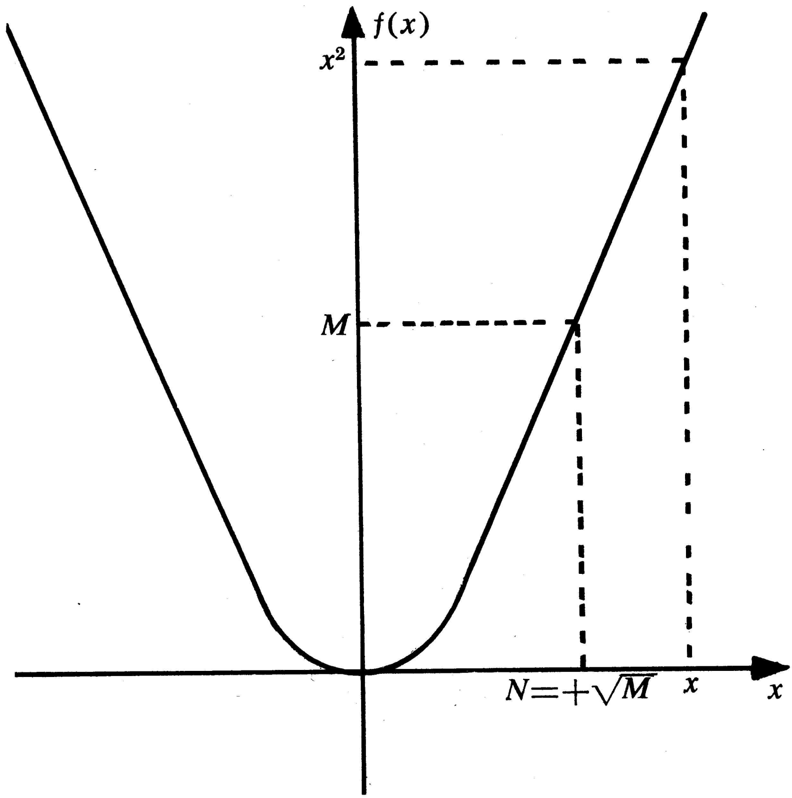

FIG. IV-7

Ejercicio 1. Demuestra que $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$

Ejercicio 2. Demuestra que $\lim_{x\to\infty} x + 1 = \infty$

Ejercicio 3. ¿Cómo definirías $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$?

Ejercicio 4. ¿Cómo definirías $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$?

Ejercicio 5. ¿Cómo definirías $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$?

Sugerimos que los ejercicios 3, 4 y 5 se realicen en grupos de trabajo, y que se comparen resultados con otros grupos.

1.2 El significado de $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

La expresión $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ se lee: el límite de f de x

es L ($L \in \mathbf{R}$) cuando x tiende a infinito, ó f de x tiende a L cuando x tiende a ∞.

Tratemos de seguir el método del párrafo anterior, para entender el significado de la expresión que nos ocupa.

Es posible que, al imaginarnos la gráfica de una función que tienda a L, cuando $x \to \infty$, se nos ocurran dos versiones:

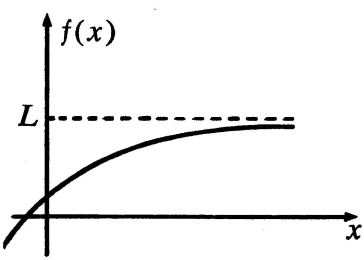

FIG. IV-8 (a)

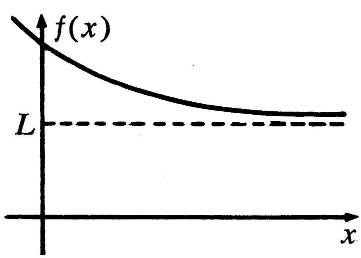

FIG. IV-9 (a)

Entonces, nuestra definición debe tomar en cuenta que $f(x)$ puede *acercarse* a L, tanto por "arriba" como por "abajo". El primer intento podría ser:

$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a ∞ si y sólo si para *cualquier* punto x_0 en el dominio de la función, los puntos x a su derecha tengan imagen $f(x)$, *más cerca* de L que la imagen de $f(x_0)$; es decir, que $d(f(x), L) < d(f(x_0), L)$.

Las funciones de las figuras IV-8 (a) y IV-9 (a) cumplen con esta definición.

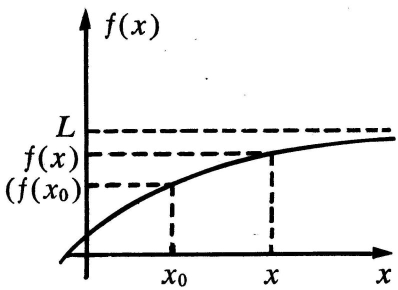

FIG. IV-8 (b)

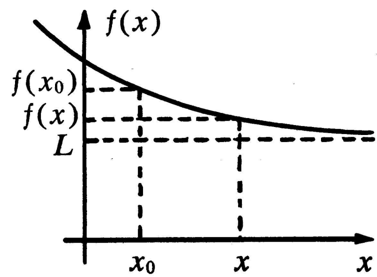

FIG. IV-9 (b)

En ambos casos, todos los puntos x a la derecha de x_0 cumplen con $d(f(x), L) < d(f(x_0), L)$. Sin embargo, muchas funciones que, según nosotros, tienden a L cuando x tiende a ∞, no cumplen con la definición propuesta. Todos los lectores estarán de acuerdo con que la función de la Fig. IV-10 (a) tiende a L cuando $x \to \infty$.

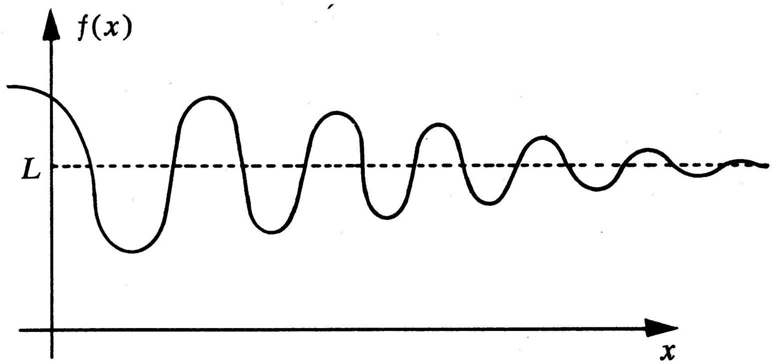

FIG. IV-10 (a)

A pesar de eso, es posible elegir *algún* punto x_0 para el cual no todas las imágenes de puntos a la derecha disten de L en menos que la distancia de $f(x_0)$ a L; es decir, que haya por lo menos *algún punto,* llamémosle x, a la derecha de x_0 tal que $d(f(x), L)$ no sea menor que $d(f(x_0), L)$, o lo que es lo mismo: que exista algún punto $x > x_0$ tal que $d(f(x), L) \geqslant d(f(x_0), L)$. La figura IV-10 (b) muestra esto:

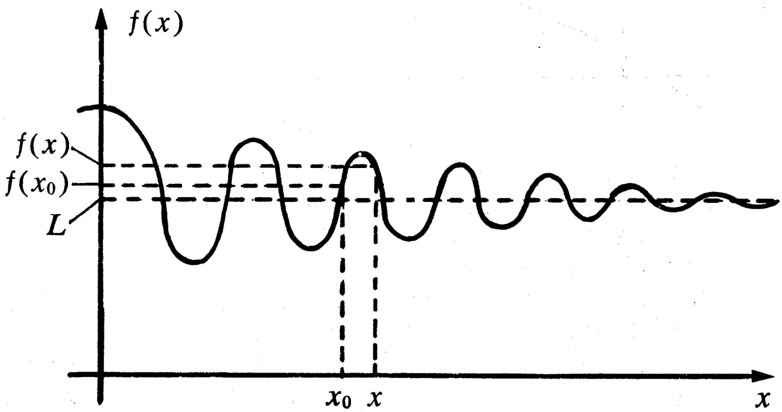

FIG. IV-10 (b)

Parece ser que el error en la definición propuesta es pedir que $d(f(x), L) < d(f(x_0), L)$ para CUALQUIER punto de x_0.

Si analizamos las figuras IV-8 (a), IV-9 (a) y IV-10 (a), veremos que hay ALGUNOS puntos x_0 tales que, si $x_0 < x$, entonces $d(f(x), L) < d(f(x_0), L)$. (Dejamos, como ejercicio, que el lector señale dichos puntos).

Entonces se nos ocurre corregir la definición y decir: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$, si y sólo si hay *algún* punto x_0 tal que *todos* los puntos a la derecha de x_0 vayan a dar, bajo la función, más cerca de L que $f(x_0)$; es decir que, si $x > x_0$ entonces $d(f(x), L) < d(f(x_0), L)$.

El inconveniente de esta definición es que "deja" tender a L, cuando $x \to \infty$, a demasiadas funciones. Un ejemplo es la función de la figura IV-11 (a).

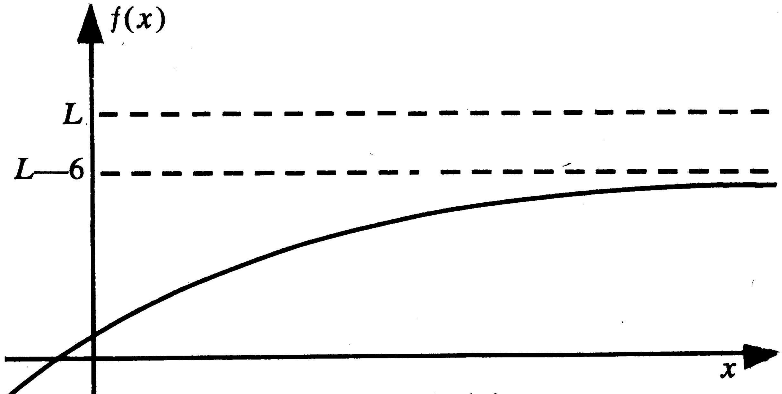

FIG. IV-11 (a)

Pedimos al lector que colabore a demostrar que esta función cumple la última definición propuesta.

Localiza, en la figura IV-11 (b), algún punto x_0 en el dominio de la función, y localiza la imagen correspondiente $f(x_0)$ en el contradominio. Ahora bien, fíjate que la distancia de la imagen de cualquier punto x, que esté a la derecha de x_0, a L, es menor que la distancia de $f(x_0)$ a L; es decir, si $x > x_0$, entonces $d(f(x), L) < d(f(x_0), L)$.

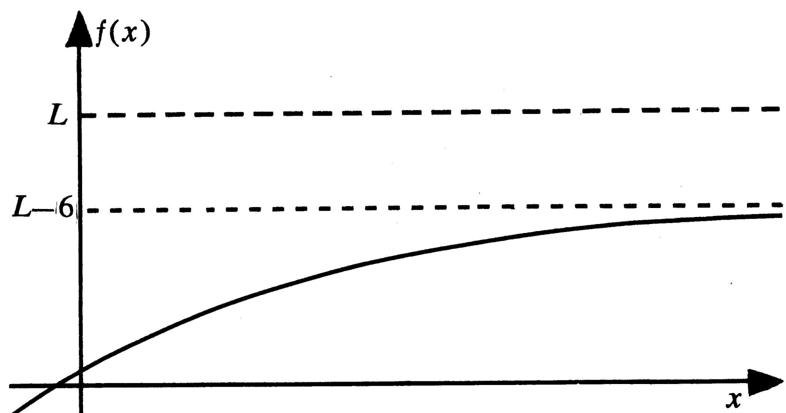

FIG. IV-11 (b)

Hemos mostrado que esta función cumple la definición, y el lector estará de acuerdo con que ésta función NO tiende a L. Tenderá a $L — 6$, pero no a L.

Es conveniente pensar si nuestro planteamiento es correcto o no. Según se ha demostrado, hasta ahora no lo es. El hecho de que a valores cada vez más alejados del origen corresponden, bajo la función, valores más cercanas a L, NO nos garantiza, como es el caso de la función de la Fig. IV-11 (a), que estos valores estén *tan cerca como queramos* de L. ¡He aquí el meollo! Debemos exigir que, a partir de cierto punto, los valores de la función estén tan cerca como queramos de L; no importa si arriba o abajo de L, sino que estén *muy cerca* de L. Es decir que, a partir de cierta N, los puntos a la derecha vayan a dar, bajo la función, a puntos dentro de una *vecindad prefijada* de L, sin importar lo pequeña que ésta sea, es decir, sin importar que su radio sea un número muy pequeño.

Proponemos entonces la siguiente definición:

$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a ∞ si y sólo si, dado cualquier vecindad de L, existe un número N tal que, si $x > N$, entonces $f(x)$ es un elemento de la vecindad dada.

Ilustramos esto en las siguientes figuras, donde al radio de la vecindad prefijada le llamamos ϵ, así $V_\epsilon(L) = (L — \epsilon, L + \epsilon)$.

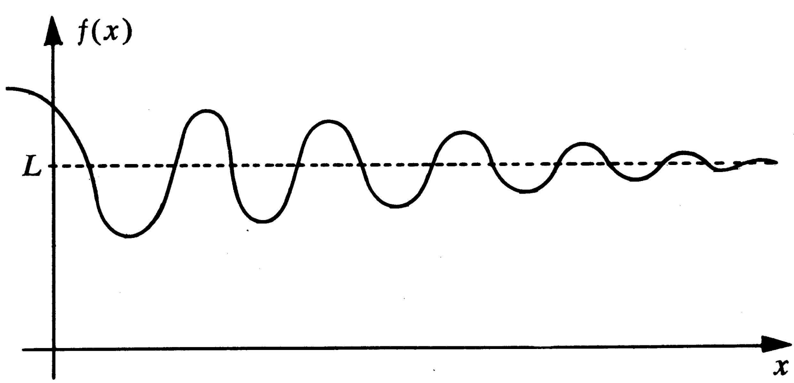

FIG. IV-12 (a)

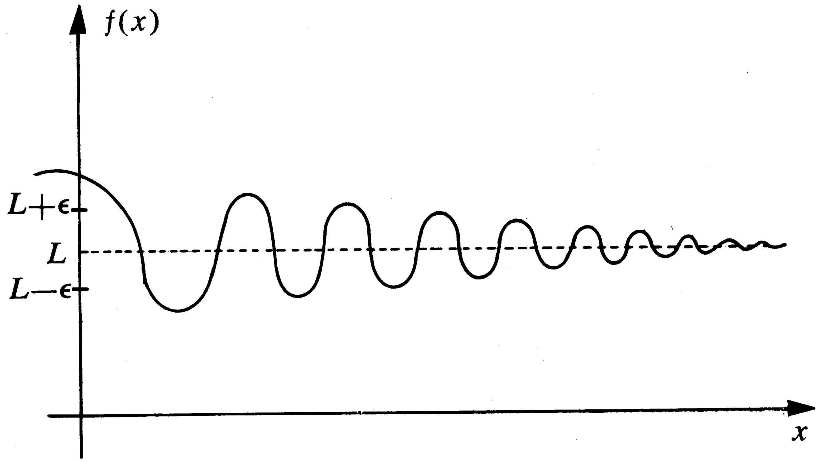

FIG. IV-12 (b)

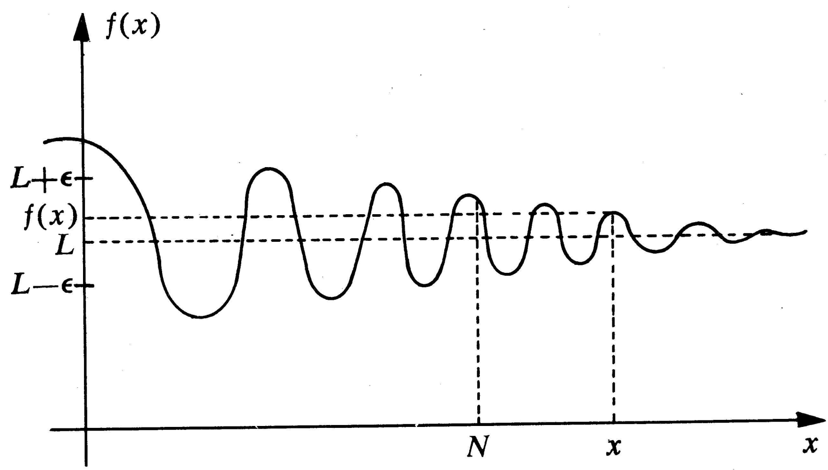

FIG. IV-12 (c)

Escribamos la definición en su versión formal:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ si y sólo si, para toda vecindad $V_\epsilon(L)$, existe N tal que, si $x > N$, entonces $f(x) \in V_\epsilon(L)$.

Nótese que decir $f(x) \in V_\epsilon(L)$, equivale a decir $d(f(x), L) < \epsilon$. Tomando esto en cuenta, podemos reescribir la definición de la siguiente manera:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ si y sólo si, para toda $\epsilon > 0$ (recordemos que ϵ es el radio de una vecindad, y por lo tanto es un número positivo), existe N tal que, si $x > N$, entonces $d(f(x), L) < \epsilon$.

Recordemos también que, si $a, b \in \mathbf{R}$, denotamos la distancia como $d(a, b) = |a - b|$. Entonces, podemos rereescribir la definición como sigue:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe N tal que, si $x > N$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Nuevamente pedimos al lector que dibuje funciones y que, dado un real L, compruebe si tienden o no a L cuando $x \to \infty$.

a) Sea $L \in \mathbf{R}$. Consideremos la función constante f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = L$. La gráfica de esta función es:

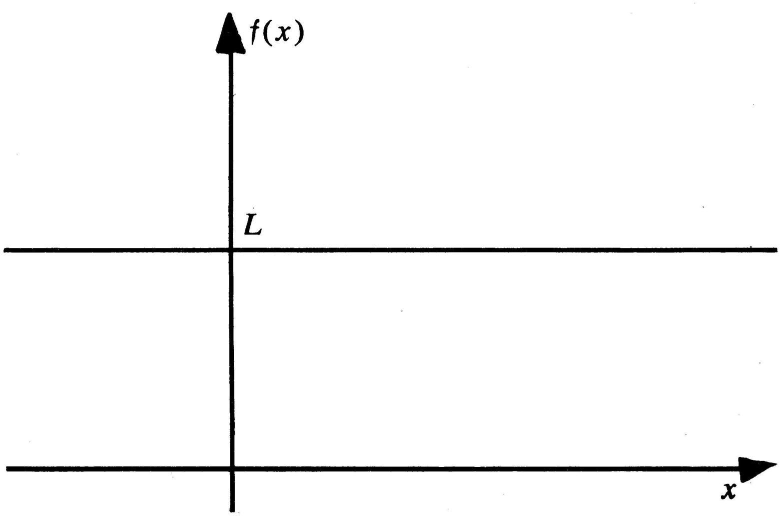

FIG. IV-13

Mostraremos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$.

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. En este caso, podemos considerar N como cualquier número real. Si $x > N$, entonces $f(x) = L$, y por lo tanto $d(f(x), L) = d(L, L) = 0 < \epsilon$.

Q.E.D.

b) Sea f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$. Demostraremos que $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$.

Sugerimos al lector dibuje la gráfica de la función:

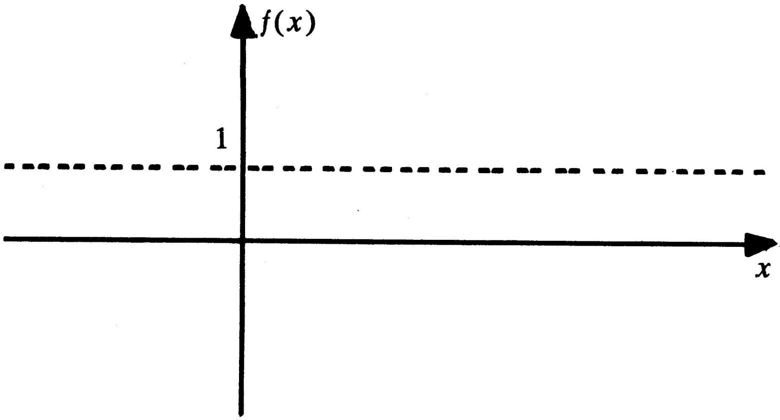

FIG. IV-14

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Hagamos $N = \dfrac{1}{\epsilon}$. Tenemos

que demostrar que, si $x > N$, es decir, si $x > \dfrac{1}{3}$ entonces $d\left(1 + \dfrac{1}{x}, 1\right) < \epsilon$.

Sea $x > N$. Sabemos que

$$d(1+\frac{1}{x}, 1) = |(1+\frac{1}{x}) - 1| = |\frac{1}{x}|;$$

como $\frac{1}{x}$ es positivo (¿por qué?), entonces $|\frac{1}{x}| = \frac{1}{x}$

(¿por qué?); es decir, $d(1+\frac{1}{x}, 1) = \frac{1}{x}$; pero como

$x > \frac{1}{\epsilon}$, entonces $\frac{1}{x} < \epsilon$; es decir, si $x > N$, entonces

$d(1+\frac{1}{x}, 1) < \epsilon$.

Q.E.D.

Ejercicio 6. En cada una de las figuras IV-8(a), IV-9 (a), y IV-10(a), encuentra al menos tres puntos x_0 tales que para toda $x > x_0$ se tenga

$$d(f(x),L) < d(f(x_0),L).$$

Ejercicio 7. ¿Cómo definirías $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$? ¿Por qué?

Se propone que este ejercicio se haga por equipos de trabajo, y después se comparen los resultados con los de otros equipos.

Ejercicio 8. Con la definición dada en el ejercicio anterior, demuestra que $\lim_{x\to-\infty} (1+\frac{1}{x}) = 1$.

1.3 El significado de $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

En este párrafo, trataremos que el lector mismo llegue al significado de la expresión $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Nosotros sugeriremos algunas definiciones; es misión del lector analizarlas y, dando ejemplos y contraejemplos, determinar si estamos dando la "definición correcta".

La expresión $\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = \infty$ se lee, como ya todos suponen: el límite de f de x es infinito cuando x tiende a **a**, ó f de x tiende a infinito cuando $x \to \mathbf{a}$.

Pedimos al lector que dibuje una función que tienda a ∞ cuando $x \to \mathbf{a}$.

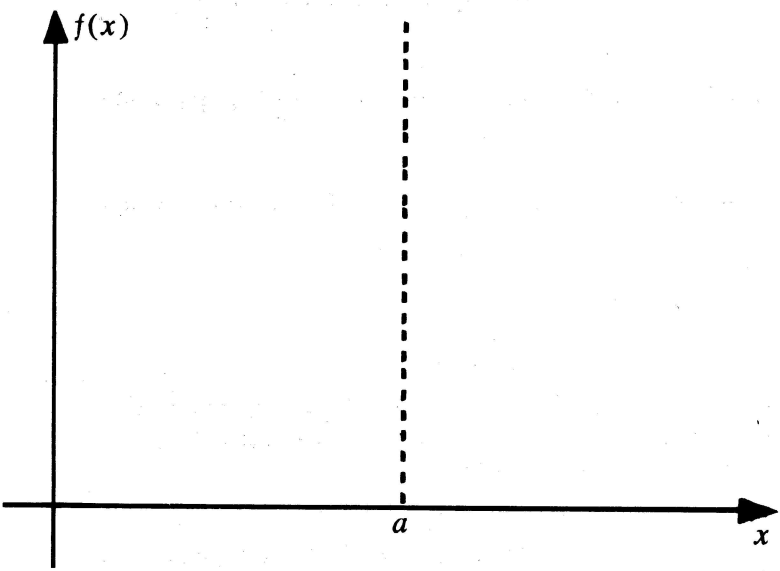

FIG. IV-15

¿Estás seguro de que lo dibujado es una función?
¿Cuál es el dominio de esa función?

Proponemos la siguiente definición:

$\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = \infty$ si y sólo si, *para toda* $x \in D_f$, las imágenes de los puntos x, tales que $d(x, \mathbf{a}) < d(x_0, \mathbf{a})$, cumplen con $f(x) > f(x_0)$.

¿Cumple la función que dibujaste en la Fig. IV-15 con la definición propuesta? Explica

¿Por qué no cumple la siguiente función con la definición propuesta?

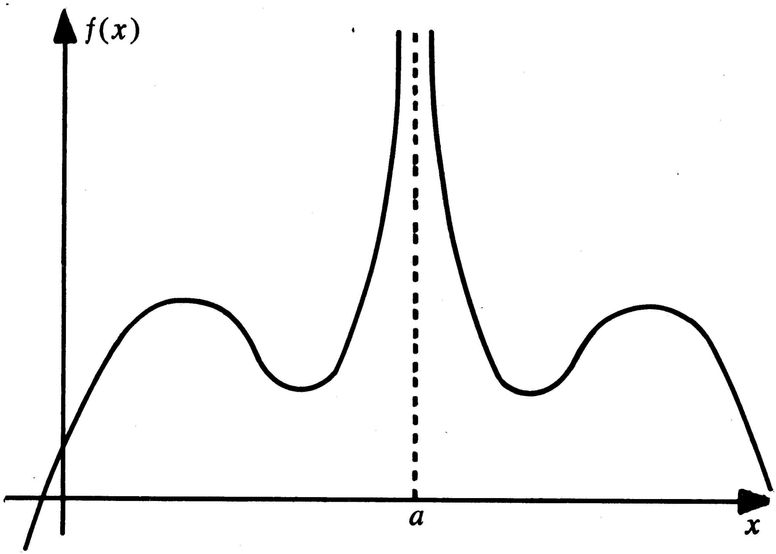

FIG. IV-16

¿Cómo corregirías la definición de tal manera que la función de la figura IV-16 la cumpliera?

Comprueba que la función de la figura IV-16 cumple con la definición corregida.

¿Por qué crees que nos interesa que la función de la figura IV-16 cumpla la definición?

Proponemos ahora la siguiente definición:

$\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = \infty$ si y sólo si existe algún $x_0 \in D_f$ tal que,

si $d(x, \mathbf{a}) < d(x_0, \mathbf{a})$, entonces $f(x) > f(x_0)$.

¿La función que dibujaste en la Fig. IV-15 cumple con esta definición? Explica (dibuja si es necesario).

¿La función de la Fig. IV-16 cumple con la definición propuesta? Explica.

¿Por qué la siguiente función cumple con la definición?

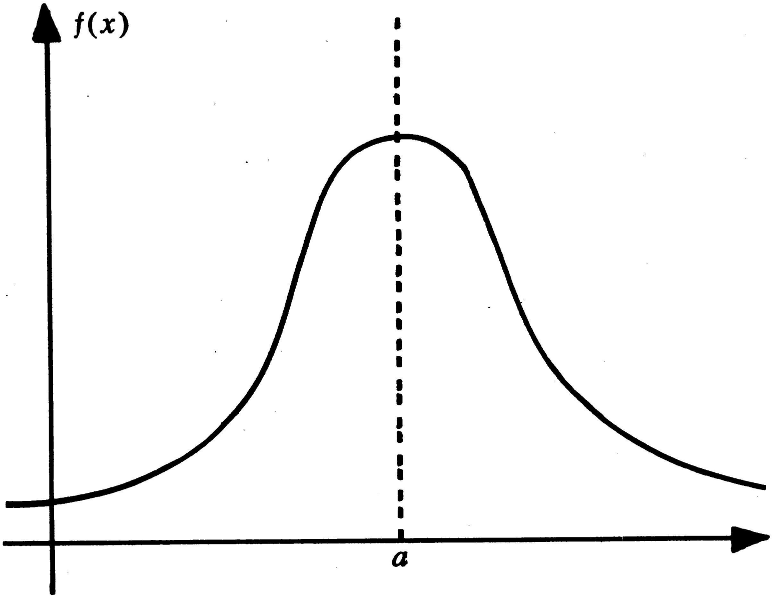

FIG. IV-17

¿Crees que la función de la Fig. IV-17 tiende a ∞ cuando $x \to \mathbf{a}$? _______ ¿Por qué?

Corrige la definición, de tal manera que la función de la Fig. IV-17 NO la cumpla, y la función de la Fig. IV-16 SÍ la cumpla.

Comprueba que la función de la Fig. IV-17 no cumple con la definición corregida, y que la función de la Fig. IV-16 sí la cumple.

¿Por qué crees que nos interesa que la función de la figura IV-17 NO cumpla con la definición?

Quizá has tenido gran dificultad para efectuar esta última corrección; aún más, es posible que muchos lectores no hayan podido efectuar la corrección deseada. Esto se debe a que el enfoque no ha sido adecuado. Debemos recordar que pedir que la función tienda a ∞, es pedir que "suba" tanto como queramos. Y pedir que la función tienda a ∞ cuando $x \to \mathbf{a}$, es pedir que suba tanto como queramos para valores x cercanos a $\mathbf{a}$.

Proponemos la siguiente definición: $\lim\limits_{x \to \mathbf{a}} f(x) = \infty$ si y sólo si existe alguna vecindad $V(\mathbf{a})$ de $\mathbf{a}$ tal que las imágenes de los puntos $x \epsilon V(\mathbf{a})$ son mayores que cualquier número prefijado M, sin importar lo grande que éste sea.

La versión formal de la definición es: $\lim\limits_{x \to \mathbf{a}} f(x) = \infty$ si y sólo si para toda M (no importa qué tan grande sea) existe alguna vecindad $V_\delta(\mathbf{a})$ (llamaremos δ al radio de la vecindad), de tal manera que si $x \in V_\delta(\mathbf{a})$; es decir, si $d(x, \mathbf{a}) < \delta$, entonces $f(x) > M$.

¿Cuáles de las funciones de las figuras IV-15, IV-16, IV-17 cumplen con esta definición? Explica por qué.

Fíjate en la siguiente figura. El dominio de la función dibujada es $\mathbf{R} - \{\mathbf{a}\}$; es decir, $f(\mathbf{a})$ no está definida.

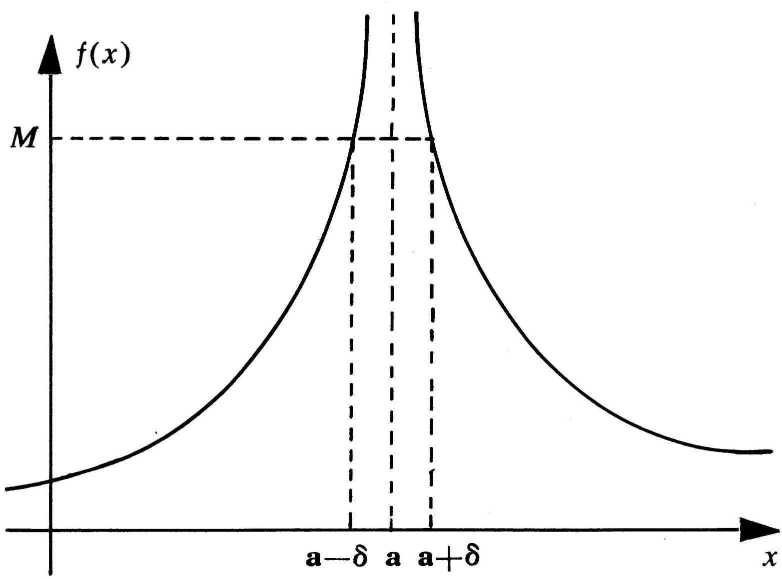

FIG. IV-18

Ahora, para $x = \mathbf{a}$, tenemos $d(x, \mathbf{a}) < \delta$, ya que $d(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$, y δ, por ser el radio de una vecindad, es mayor que 0. Sin embargo, no podemos decir que $f(\mathbf{a}) > M$. Esto es, la función de la Fig. IV-18 ¡no cumple la definición! y nos parece que esa función tiende a ∞ cuando $x \to \mathbf{a}$.

Podemos arreglar esto agregando en la definición que sólo a las x que estén en $V_\delta(\mathbf{a})$ y *que estén en el dominio de la función,* serán a las que exigiremos cumplir $f(x) > M$.

La versión formal de la definición corregida es:

$\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = \infty$ si y sólo si para toda M existe $\delta > 0$ tal que si $x \in V_\delta(\mathbf{a}) \cap D_f$ entonces $f(x) > M$.

¡Ahora sí!, la *función* de la Fig. IV-18 CUMPLE con esta nueva definición.

Pero esto no es así de fácil. En la siguiente figura, damos una función en la cual $\mathbf{a} \in D_f$; es decir, $f(\mathbf{a})$ está definida, y sin embargo, podemos prefijar M tal que $f(\mathbf{a})$ no sea mayor que esa M.

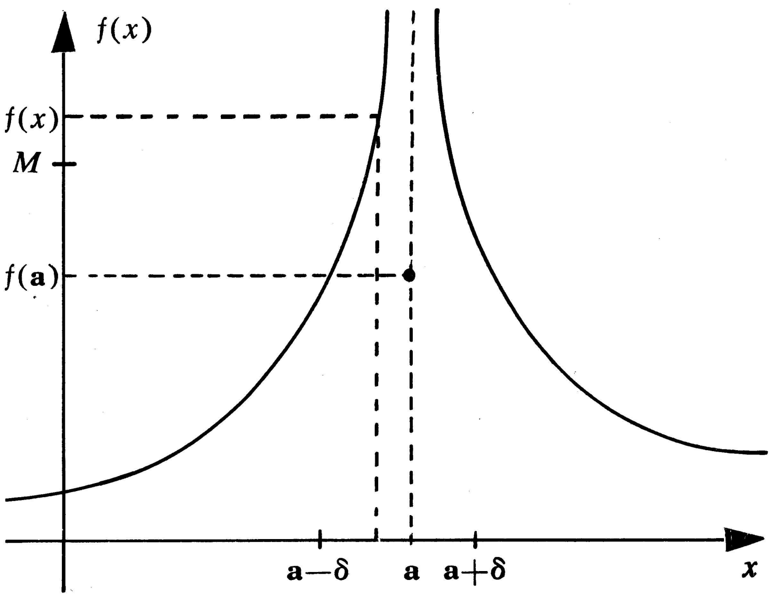

FIG. IV-19

¿Qué sucede aquí? Esta función *crece tanto como queramos,* conforme tomamos valores cada vez más cerca de $\mathbf{a}$. Es decir, esta función tiende a ∞ cuando $x \to \mathbf{a}$, *independientemente* de lo que pase en el punto $\mathbf{a}$.

Corrijamos la definición de la siguiente manera: Pidamos que para cada M exista $\delta > 0$ tal que si $x \in V_\delta(\mathbf{a}) \cap D_f$ EXCEPTO $\mathbf{a}$, entonces $f(x) > \text{M}$.

Al decir que $x \in V_\delta(\mathbf{a}) \cap D_f$ excepto $\mathbf{a}$, decimos que x está en la intersección de la *vecindad agujerada* de $\mathbf{a}$, de radio δ, con el dominio de la función. Esto es, que, si $x \in \overline{V}_\delta(\mathbf{a}) \cap D_f$, entonces $f(x) > M$.

También podemos expresar lo anterior diciendo que, si $0 < d(x, \mathbf{a}) < \delta$, entonces $f(x) > M$, con $x \in D_f$. Nótese que el *único* punto del intervalo $(\mathbf{a}-\delta, \mathbf{a}+\delta) = V(\mathbf{a})$ cuya distancia al punto $\mathbf{a}$ es 0, es precisamente $\mathbf{a}$. Al pedir que $0 < d(x, \mathbf{a})$ estamos excluyendo la posibilidad de que $x = \mathbf{a}$.

Tomando en cuenta todo lo anterior, parece que la definición debe quedar:

$\lim\limits_{x \to \mathbf{a}} f(x) = \infty$ si y sólo si para cada M (no importa lo grande que sea) existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in \overline{V}_\delta(\mathbf{a}) \cap D_f$, entonces $f(x) > M$.

En términos de distancia, podemos escribir:

$\lim\limits_{x \to \mathbf{a}} f(x) = \infty$ si y sólo si, para cada M existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D_f$ y $0 < d(x, \mathbf{a}) < \delta$ entonces $f(x) > M$.

Usando la distancia *usual* en $\mathbf{R}$:

$\lim\limits_{x \to \mathbf{a}} f(x) = \infty$ si y sólo si, para cada M, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in D_f$ y $0 < |x - \mathbf{a}| < \delta$, entonces $f(x) > M$.

Investiga cuáles de las funciones de las figuras IV-15, IV-16, IV-17, IV-18, IV-19 cumplen con esta definición, y explica por qué.

Ejemplo. Sea $f\colon \mathbf{R} - \{1\} \to \mathbf{R}$ con regla de correspondencia $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Nótese que $1 \notin D_f$.

Demostremos que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = \infty$.

Debemos, dado M, encontrar δ tal que, si $0 < d(x, 1) < \delta$, entonces $f(x) = \frac{1}{1-x^2} > M$. Vemos que esta desigualdad se cumple si

$$(1-x)^2 < \frac{1}{M},$$

es decir, si

$$|1-x| < \frac{1}{\sqrt{M}},$$

elijamos $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$; si $0 < d(x, 1) < \delta$, o, lo que es lo mismo, si $o < |1-x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$; entonces $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > M$.

Q.E.D.

Ejercicio 9. Demuestra que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

Ejercicio 10. ¿Cómo definirías $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$?

Ejercicio 11. Utilizando la definición anterior, demuestra que $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{-(1-x)^2} \right) = -\infty$

Se recomienda que los ejercicios 2 y 3 se hagan en grupos de trabajo, y que se comparen resultados con los de otros grupos.

1.4 El significado de $\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = L$

Esta expresión se lee: el límite de $f(x)$ es L ($L \in \mathbf{R}$) cuando x tiende a $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \in \mathbf{R}$); o: $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a $\mathbf{a}$.

Después de lo desarrollado en los tres párrafos anteriores, parece claro que la expresión quiere decir que podemos encontrar valores *suficientemente* cercanos al punto $\mathbf{a}$ que les corresponda bajo la función, valores *tan cercanos como queramos* al punto L.

Es decir, que es posible encontrar una vecindad de $\mathbf{a}$ tal que a los puntos que pertenezcan a esta vecindad correspondan, bajo la función, puntos en una vecindad PREFIJADA de L, sin importar lo pequeña que ésta última sea.

Formalmente, podemos expresar lo anterior como:

$\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = L$ si y sólo si para cada vecindad $V_\epsilon(L)$ de L ($\epsilon > 0$, es el radio de la vecindad de L); existe alguna vecindad $V_\delta(\mathbf{a})$ de $\mathbf{a}$ ($\delta > 0$ es el radio de la vecindad de $\mathbf{a}$), tal que, si $x \in V_\delta(\mathbf{a}) \cap D_f$, entonces $f(x) \in V_\delta(L)$.

Esta definición la cumplen funciones como:

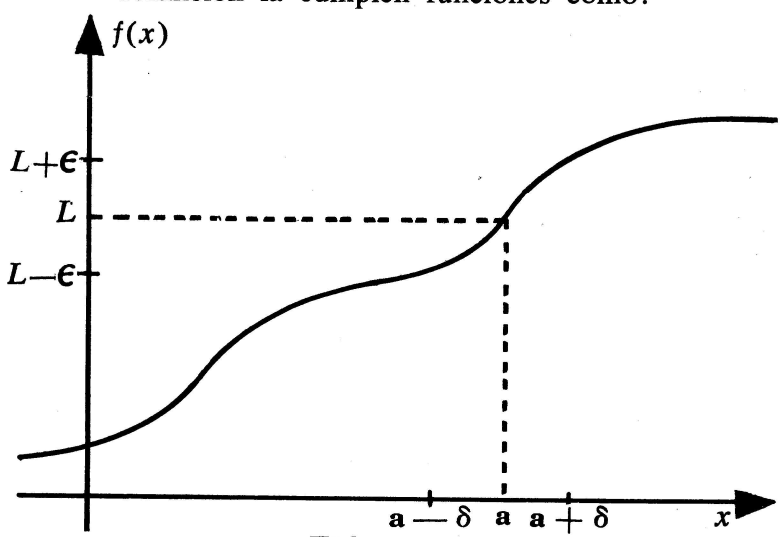

FIG. IV-20

Sin embargo, hay funciones que "tienden" a L cuando $x \to \mathbf{a}$ y no cumplen con la definición anterior, por ejemplo:

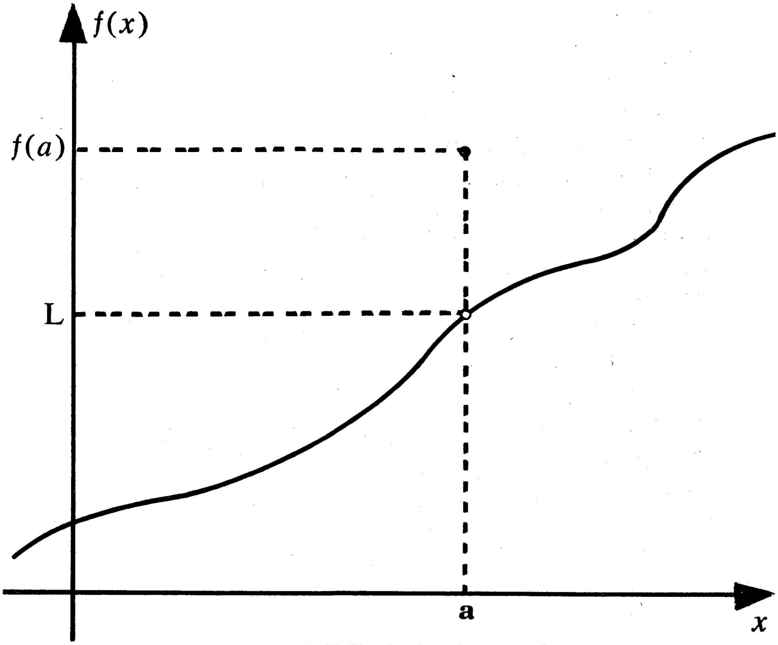

FIG. IV-21

Es claro que esta función toma valores arbitrariamente cerca de L conforme tomamos valores suficientemente cerca de **a**; esto es, *independiente* de lo que sucede en **a**. Es decir, lo importante es que los puntos en la *vecindad agujerada,* de radio δ de **a**, vayan a dar bajo la función prefijada de radio ϵ de L.

La versión formal de esta definición es:

$\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = L$ si y sólo si, para toda $V_\epsilon(L)$, existe alguna $V(a)$ tal que, si $x \in V_\delta^{\prime}(\mathbf{a}) \cap D_f$, entonces $f(x) \in V_\epsilon(L)$.

Usando el concepto de distancia:

$\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = L$ si y sólo si, para toda $\epsilon > 0$, existe

$\delta > 0$ tal que, si $x \in D_f$ y $0 < d(x, \mathbf{a}) < \delta$, entonces $d(f(x), L) < \epsilon$.

Y con la distancia en $\mathbf{R}$:
$\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = L$ si y sólo si, para toda $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in D_f$ y $0 < | x - \mathbf{a} | < \delta$, entonces $| f(x) - L | < \epsilon$.

Ejemplo: Sea f: $\mathbf{R} - \{3\} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$.

(Nótese que $3 \notin D_f$). Demostremos que $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

Hay que demostrar que, si $\epsilon > 0$ es un número arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que, si

$x \in D_f$ y $0 < | x - 3 | < \delta$, entonces $\left| \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \epsilon$.

Para $x \neq 3$, la desigualdad anterior es equivalente a

$$\left| \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} - 6 \right| = | (x + 3) - 6 | < \epsilon$$

de donde

$$| x - 3 | < \epsilon$$

Así pues, siendo ϵ arbitrario, la desigualdad

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \epsilon$$

se verificará si se cumple $0 < | x - 3 | < \epsilon$; es decir, en este caso, $\delta = \epsilon$. Por lo tanto, $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

Q.E.D.

Surge ahora la siguiente cuestión: Supongamos que $\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = L_2$. ¿Es cierto que $L_1 = L_2$?

Lo aquí planteado es la unicidad del límite. Nos interesa saber qué condiciones debemos imponer, ya sea a f, L ó $\mathbf{a}$, para que el límite sea *único*. Trataremos el problema en el apéndice a este capítulo.

Ejercicio 12. Demuestra, a partir de la definición, que:

a) $\lim_{x \to 3} (4x + 2) = 14$

b) $\lim_{x \to 3} (x + 3) = 6$

c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

d) $\lim_{x \to \mathbf{a}} c = c$, c constante.

e) $\lim_{x \to \mathbf{a}} x = \mathbf{a}$

En cada caso, aclara cuál es el dominio de la función, y trata de dibujar su gráfica.

Ejercicio 13. Sea $f\colon \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

¿Existe el límite cuando $x \to 0$? Dibuja una gráfica.

En este apéndice, definiremos los conceptos necesarios para precisar la definición de $\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = L$, de tal manera que este límite sea único.

A.1 El concepto de punto de acumulación de un conjunto. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbf{R}$. Decimos que $\alpha \in \mathbf{R}$ es un punto de acumulación de A, si, para cada vecindad de α, existe al menos un punto $x \neq \alpha$ tal que $x \in A$. Es decir, α es un punto de acumulación de A si $\overline{V}(\alpha) \cap A \neq \phi$, para toda vecindad de α.

Debemos notar que, si α es un punto de acumulación de A, no necesariamente $\alpha \in A$.

Por otro lado, el que α *no* sea punto de acumulación de A, quiere decir que *existe alguna* vecindad de α que no contiene algún punto $x \neq \alpha$ tal que $x \in A$. Es decir, α no es punto de acumulación de A si existe alguna vecindad $V(\alpha)$ de α tal que $\overline{V}(\alpha) \cap A = \phi$.

Es posible que $\alpha \in A$ y α no sea punto de acumulación de A.

Ejemplos

a) Sea $A = [4, 8]$. En este caso, cada $x \in [4, 8]$ es un punto de acumulación de A (¿por qué?), y esos son TODOS los puntos de acumulación de A. También en este caso, todos los puntos de acumulación de A son elementos de A.

b) Sea $B = (1, 7)$. En este caso, cada elemento de B es un punto de acumulación de B; sin embargo, no son esos todos los puntos de acumulación, ya que 1 y 7 también lo son (¿por qué?), y no están en B.

c) Sea $C = [0, 1) \cup \{3, 5, 7\}$. En este caso, no todos los elementos de C son puntos de acumulación de este conjunto, ya que $3 \in C$, $5 \in C$, $7 \in C$, y ninguno de ellos es punto de acumulación de C (¿por qué?). Además, hay puntos de acumulación que no están en el conjunto, como el punto 1. $1 \notin C$, y 1 es punto de acumulación de C.

A.2 Unicidad del límite. Si, en la expresión $\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x)$, **a** no es punto de acumulación del dominio de la función, entonces cualquier número real puede ser el límite de $f(x)$ cuando $x \to \mathbf{a}$. Es decir, si L_1 y L_2 son dos números reales *distintos,* y **a** no es punto de acumulación del dominio de la función, entonces es posible que $\lim_{x\to\mathbf{a}} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to\mathbf{a}} f(x) = L_2$.

Para demostrar esto, consideremos $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(L_1) \cap V_\epsilon(L_2) = \phi$. Como **a** no es punto de acumulación de D_f, entonces existe alguna vecindad $V_\delta(\mathbf{a})$(llamemos δ al radio de esa vecindad) tal que

$\overline{V}(\mathbf{a}) \cap D_f = \phi$.

Así, si $x \in V_\delta(\mathbf{a}) \cap D_f$, entonces, por vacuidad * $f(x) \in V_\epsilon(L_1)$ y $f(x) \in V_\epsilon(L_2)$.

Analicemos el caso en que **a** es un punto de acumulación del dominio de la función. Demostraremos que, si

$$\lim_{x\to\mathbf{a}} f(x) = L_1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\mathbf{a}} f(x) = L_2$$

entonces $L_1 = L_2$.

Supondremos lo contrario, que $L_1 \neq L_2$. El desarrollo de esta hipótesis nos conducirá a una contradicción; esto es, será insostenible afirmar que $L_1 \neq L_2$; por lo tanto, tendremos necesariamente que $L_1 = L_2$.

Bien, como $L_1 \neq L_2$, podemos suponer que $L_1 < L_2$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(L_1) \cap V(L_2) = \phi$.

Como $\lim_{x\to\mathbf{a}} f(x) = L_1$, para $V_\epsilon(L_1)$ existe $V_{\delta_1}(\text{a})$

tal que si $x \in \overline{V}_{\delta_1}(\mathbf{a})$, entonces $f(x) \in V_\epsilon(L_1)$.

Asimismo, $\lim_{x\to\mathbf{a}} f(x) = L_2$ implica que, para $V_\epsilon(L_2)$, existe $V_{\delta_2}(\mathbf{a})$ tal que, si $x \in \mathrm{V}_{\delta_2}(\mathbf{a}$, entonces $f(x) \in V(L_2)$.

Las vecindades $V_{\delta_1}(\mathbf{a})$ y $V_{\delta_2}(\mathbf{a})$ encontradas deben cumplir alguna de estas propiedades $\delta_1 < \delta_2$,

* Ver folleto de *Conjuntos*

$\delta_1 = \delta_2$ ó $\delta_1 > \delta_2$; es decir, $V_{\delta_1}(\mathbf{a}) \subseteq V_{\delta_2}(\mathbf{a})$ ó

$$V_{\delta_2}(\mathbf{a}) \subseteq V_{\delta_1}(\mathbf{a}).$$

Supongamos que $V_{\delta_1}(\mathbf{a}) \subseteq V_{\delta_2}(\mathbf{a})$ (si $V_{\delta_2}(\mathbf{a}) \subseteq V_{\delta_1}(\mathbf{a})$, la demostración es análoga). Como **a** es un punto de acumulación de D_f, entonces, para cualquier vecindad de **a**, en particular para $V_{\delta_1}(\mathbf{a})$, existe $x \in D_f$ tal que $x \in \overline{V}_{\delta_1}(\mathbf{a}) \cap D_f$. Y, por estar $V_{\delta_1}(\mathbf{a})$ contenido en $V_{\delta_2}(\mathbf{a})$, tenemos también que $x \in V_{\delta_2}(\mathbf{a}) \cap D_f$, y por lo tanto $f(x) \in V_\epsilon(L_1)$ y $f(x) \in V_\epsilon(L_2)$; es decir $f(x) \in V_\epsilon(L_1) \cap V_\epsilon(L_2)$, lo cual contradice la hipótesis de que $V(L_1) \cap V_\epsilon(L_2) = \phi$.

Q. E. D.

Entonces, la definición de límite que garantiza la unicidad será:

$\lim\limits_{x \to \mathbf{a}} f(x) = L$ si y sólo si, para toda $V_\epsilon(L)$, existe alguna $V_\delta(\mathbf{a})$ tal que, si **a** es un punto de acumulación de D_f y $x \in \overline{V}_\delta(\mathbf{a}) \cap D_f$, entonces $f(x) \in V_\epsilon(L)$.

Se deja como ejercicio dar las definiciones, usando el concepto de distancia.

Ejercicio 14. Encuentra un subconjunto A de **R** tal que todos sus puntos sean puntos de acumulación de A.

Ejercicio 15. Encuentra un subconjunto B de **R** tal que ningún punto de B sea punto de acumulación de B, y sin embargo, que B tenga al menos un punto de acumulación.

Ejercicio 16. Sea $f: A \to B$. Si $X \subseteq A$, definimos $f(X) = \{y \in B \mid f(x) = y,\ x \in X\}$.

Sea $\phi \subseteq A$. Demuestra que, si $Y \subseteq B$ y $Z \subseteq B$ son dos subconjuntos *ajenos* de B, entonces $f(\phi) \subseteq Y$ y $f(\phi) \subseteq Z$.

Ejercicio 17. Construye una función real tal que, si $L_1 \neq L_2$, se tenga:

$$\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = L_1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = L_2$$

Ejercicio 18. Trata de construir una función tal que, si $L_1 \neq L_2$, y **a** es punto de acumulación del dominio, entonces:

$$\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = L_1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = L_2$$

Ejercicio 19. Da la definición de límite, usando el concepto de distancia y, en particular, la distancia en **R**.

2. "LIMITE" Y "NO LIMITE"

Ya sabemos el significado de, por ejemplo,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

pero, ¿qué querrá decir $\lim_{x \to a} f(x) \neq \infty$?

Nos proponemos analizar, en este breve capítulo, a base de algunos ejemplos, el significado de esas expresiones.

Sabemos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ quiere decir que, dado M, es posible encontrar N tal que, si $x > N$, entonces $f(x) > M$.

Para averiguar el significado de $\lim_{x \to \infty} f(x) \neq \infty$, debemos negar la proposición anterior. Lo hacemos de la siguiente manera:

$\lim_{x \to \infty} f(x) \neq \infty$, si es posible encontrar alguna M tal que, sin importar que N considere, siempre haya puntos a la derecha de N que vayan a dar, bajo la función, abajo de M.

Ejemplo. Sea f la función de la Figura V-1.

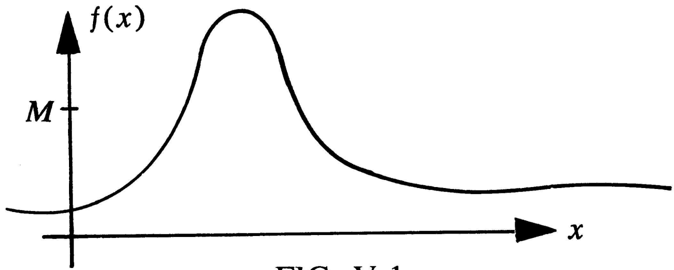

FIG. V-1

Para la M señalada en la figura se tiene que: para cualquier $N \in D_f$, siempre hay puntos $x > N$ tales que $f(x) \leqslant M$.

Invitamos al lector a que dé un valor a N y localice algunos de estos puntos.

También, sabemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ quiere decir que, para cualquier vecindad $V_\epsilon(L)$, existe N tal que, si $x > N$, entonces $f(x) \in V_\epsilon(L)$.

Neguemos esta proposición; esto es:

$\lim_{x\to\infty} f(x) \neq L$, si existe alguna vecindad $V_r(L)$ tal que, sin importar qué N considere, siempre haya puntos $x > N$ tales que $f(x) \notin V_r(L)$.

Ejemplo. Sea f como en la FIG. V-2.

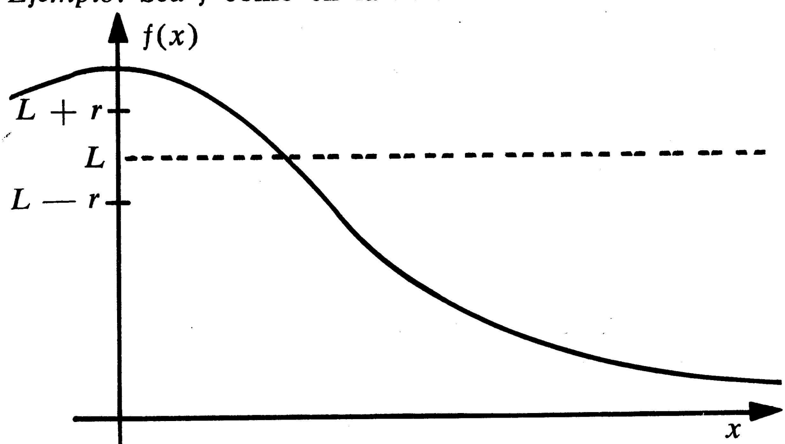

FIG. V-2

Dada la vecindad señalada en la figura, sin importar qué N tomemos, siempre habrá puntos a la derecha de N cuya imagen no está dentro de $V_r(L)$.

Otra expresión que analizamos en el capítulo anterior es $\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = \infty$, que quiere decir: para toda M es posible encontrar alguna $V_\delta(\mathbf{a})$ tal que, si $x \in \overline{V}_\delta(\mathbf{a}) \cap D_f$, entonces $f(x) > M$.

Al negar la proposición anterior, obtendremos el significado de $\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) \neq \infty$. Este será:

$\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) \neq \infty$ si existe M tal que, para cualquier vecindad $V_\delta(\mathbf{a})$, es posible encontrar $x \in \overline{V}_\delta(\mathbf{a}) \cap D_f$ tal que $f(x) \leqslant M$.

Ejemplo. Consideremos la función de la FIG. V-3.

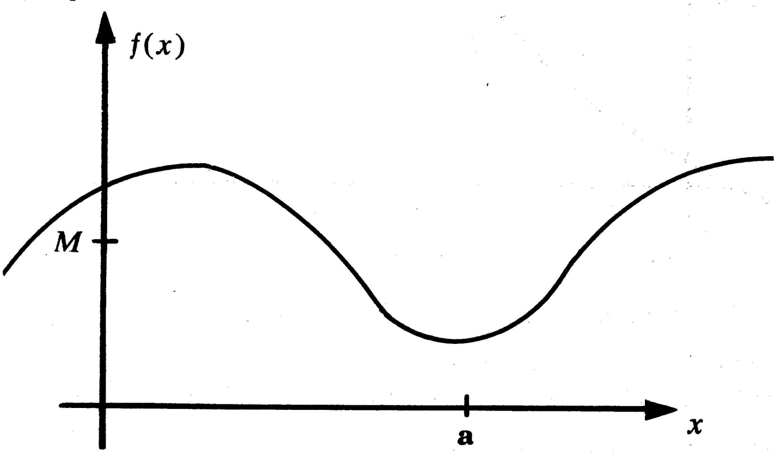

FIG. V-3

Señalamos M. Pedimos al lector que dé cualquier vecindad de $\mathbf{a}$ y localice en esa vecindad al menos un punto que cumpla $x \in \overline{V}_\delta(\mathbf{a}) \cap D_f$ y $f(x) \leqslant M$.

Por último, vimos que $\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = L$ quiere decir que, para toda $V_\epsilon(L)$, existe $V_\delta(\mathbf{a})$ tal que, si $x \in \overline{V}_\delta(\mathbf{a}) \cap D_f$, entonces $f(x) \in V_\epsilon(L)$.

Negar que, *para toda* $V_\epsilon(L)$, *exista* $V_\delta(a)$ ..., es equivalente a afirmar que *al menos una* $V_\epsilon(L)$ tiene la propiedad de que, *en toda* vecindad $V_\delta(\mathbf{a})$ existen puntos $x \in \overline{V_\delta}(\mathbf{a}) \cap D_f$ tales que $f(x) \notin V_\epsilon(L)$.

Ejemplo. Analicemos la función de la figura V-4.

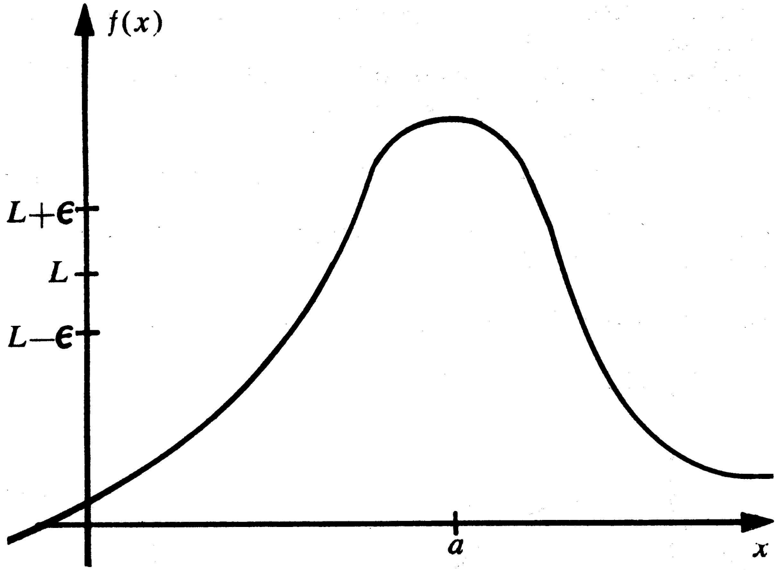

FIG V-4

La vecindad señalada en la figura cumple con la propiedad de que hay puntos $x \in \overline{V_\delta}(\mathbf{a}) \cap D_f$ tales que $f(x) \notin V_\epsilon(L)$, y esto, para cualquier vecindad $V_\delta(\mathbf{a})$.

Ejercicio 20. Demuestra que:

a) $\lim\limits_{x \to 2} x \neq 3$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \neq 1538$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x} \neq 3$

d) $$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x^2)} \neq -80$$

Ejercicio 21. Trata de encontrar otras maneras de negar las expresiones estudiadas en el capítulo IV.

Este ejercicio deberá hacerse en grupos de trabajo.

3. TEOREMAS SOBRE LIMITES

En este capítulo, enunciaremos cinco teoremas, y demostraremos algunos, que nos permitirán calcular límites de funciones algo complicadas.

Al final, se incluye una larga lista de ejercicios; es fundamental que el lector los resuelva todos, para lograr una fluidez aceptable en el manejo de límites.

El primer teorema dice que, si conocemos el límite de f y de g cuando $x \to \mathbf{a}$, entonces conocemos el límite de $f+g$, cuando $x \to \mathbf{a}$. Lo enunciaremos así:

TEOREMA 1. Sean f y g funciones tales que:

$$\lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \mathbf{a}} g(x) = M$$

y, si $\mathbf{a}$ es un punto de acumulación de D_{f+g}, entonces el límite de $f+g$ cuando $x \to \mathbf{a}$ existe, y

$$\lim_{x \to \mathbf{a}} (f+g)(x) = \lim_{x \to \mathbf{a}} f(x) + \lim_{x \to \mathbf{a}} g(x) = L+M$$

DEMOSTRACION. Sea $\epsilon > 0$. Queremos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in D_{f+g}$ y $0 < |x-\mathbf{a}| < \delta$, entonces $|(f+g)(x)-(L+M)| < \epsilon$. Ahora, usando la desigualdad del triángulo,* tenemos que:

$$\begin{aligned} |(f+g)(x)-(L+M)| &= |f(x)+g(x)-L-M| \\ &= |(f(x)-L)+(g(x)-M)| \\ &\leqslant |f(x)-L| + |g(x)-M| \end{aligned}$$

es decir, que

$$|(f+g)(x)-(L+M)| \leqslant |f(x)-L| + |g(x)-M|.$$

* Ver sección 1.3 del folleto *Funciones Reales.*

Entonces, si logramos que cada uno de los términos de la derecha sea menor que $\epsilon/2$ para x, en una vecindad de **a**, habremos obtenido el resultado deseado.

Como $\lim_{x\to \mathbf{a}} f(x)=L$, para cada $\epsilon/2>0$ existe $\delta_1>0$ tal que, si $x\in D_f$ y $0<|x-\mathbf{a}|<\delta_1$, entonces $|f(x)-L|<\epsilon/2$

Además, como $\lim_{x\to \mathbf{a}} g(x)=M$, para cada $\epsilon/2>0$ existe $\delta_2>0$ tal que, si $x\in D_f$ y $0<|x-a|<\delta_2$, entonces $|g(x)-M|<\epsilon/2$.

Sea $\delta>0$ un número menor que δ_1 y δ_2. Entonces, si $x\in D_{f+g}=D_f\cap D_g$ y $0<|x-\mathbf{a}|<\delta$, tendremos que:

$$|(f+g)(x)-(L+M)|\leqslant |f(x)-L|+|g(x)-M|$$
$$<\epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon.$$

Q.E.D.

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1+0=1.$$

Lo que el primer teorema dice del límite de la suma, el segundo lo dice de la multiplicación.

TEOREMA 2. Si f y g son funciones tales que

$$\lim_{x\to \mathbf{a}} f(x)=L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to \mathbf{a}} g(x)=M$$

y, si **a** es un punto de acumulación de $D_{fg}=D_f\cap D_g$, entonces el $\lim_{x\to \mathbf{a}} (fg)(x)$ existe, y

$$\lim_{x\to a} (fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L \cdot M.$$

Ejemplo. $\lim_{x\to 2} 4x^2 = \lim_{x\to 2} 4 \cdot \lim_{x\to 2} x^2 = 4 \cdot 4 = 16.$

TEOREMA 3. Si el $\lim_{x\to a} g(x) = L \neq 0$, entonces el límite de $\frac{1}{g}$ existe cuando $x \to a$ y $\lim_{x\to a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{L}$.

COROLARIO. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, y si $M \neq 0$ y a es un punto de acumulación del dominio de $\frac{f}{g}$, entonces $\lim \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ existe, y

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x+5}{4x-2} = \frac{\lim_{x\to 1} (3x+5)}{\lim_{x\to 1} (4x-2)} = \frac{3 \lim_{x\to 1} x+5}{4 \lim_{x\to 1} x-2} = \frac{18}{4}$$

TEOREMA 4. Si entre los valores correspondientes de las tres funciones f, g, h, se cumplen las desigualdades $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para toda $x \in D_f \cap D_g \cap D_h$, y además $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$; entonces, $\lim_{x\to a} g(x)$ existe, y $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

DEMOSTRACION.

Sea $\epsilon > 0$. Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que, si $x \in D_g$ y $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|g(x)-L| < \epsilon$.
Como $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, tenemos que:

$$f(x)-L \leqslant g(x)-L \leqslant h(x)-L \text{ ——————— } (1)$$

Como $\lim\limits_{x\to \mathbf{a}} f(x)=L$, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in D_f$ y $0 < |x-\mathbf{a}| < \delta$, entonces $|f(x)-L| < \epsilon$.

Además, como $\lim\limits_{x\to \mathbf{a}} h(x)=L$, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que, si $x \in D_h$ y $0 < |x-\mathbf{a}| < \delta_2$, entonces $|h(x)-L| < \epsilon$.
Haciendo, $\delta = min \{\delta_1, \delta_2\}$, se verificará que, si $x \in D_f \cap D_g \cap D_h$ y $0 < |x-\mathbf{a}| < \delta$, entonces

$$-\epsilon < f(x)-L < \epsilon, \text{ y } -\epsilon < h(x)-L < \epsilon.$$

Esto, y la desigualdad (1), implican que

$-\epsilon < g(x)-L < \epsilon$; o sea, que $|g(x)-L| < \epsilon$;

es decir, $\lim\limits_{x\to \mathbf{a}} g(x)=L$.

Q.E.D.

TEOREMA 5. Si $f(x) \geqslant 0$, para toda $x \in D_f$ y $\lim\limits_{x\to \mathbf{a}} f(x)=L$, entonces $L \geqslant 0$.

DEMOSTRACION. Supongamos que $L < 0$. Sea $0 < \epsilon < d(L, 0)$; entonces, $y \in V_\epsilon(L)$ implica $y < 0$.

Como $\lim\limits_{x\to \mathbf{a}} f(x)=L$, para cada $\epsilon > 0$, en particular para $\epsilon < d(L, 0)$, existe $\delta > 0$, tal que, si $x \in \overline{V_\delta}(a)\ D_f$; entonces $f(x) \in V_\epsilon(L)$.

De aquí, $f(x) < 0$ que contradice la tesis de que $f(x) \geqslant 0$.

$$\therefore L > 0.$$

TEOREMA 6. Si $\lim_{t \to t_0} f(t) = x_0$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$, entonces $\lim_{t \to t_0} (g \circ f)(t) = L$.

Q.E.D.

Calcular los límites siguientes:

Ejercicio 22. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$

Ejercicio 23. $\lim\limits_{x \to \pi/2} (2 \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{cotgn} x)$

Ejercicio 24. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{2+x}}$

Ejercicio 25. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right)$

Ejercicio 26. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$

Ejercicio 27. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x}$

Ejercicio 28. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+x-1}{2x+5}$

Ejercicio 29. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$

Ejercicio 30. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^3+2x}$

Ejercicio 31. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

Ejercicio 32. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$

Ejercicio 33. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

Ejercicio 34. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$

Ejercicio 35. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2-x-6}$

Ejercicio 36. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

Ejercicio 37. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$

Bibliografía

[1] R. Courant y F. John. *Introduction to Calculus and Analysis.* Vol. 1, Interscience Publishers.

[2] N.Haaser; J. La Salle y J. Sullivan. *Introduction to Analysis.* Blaisdell Publishing Co. 1959.

[3] M. López Mateos. *Funciones Reales.* ANUIES 1972.

[4] E. Moise. *Calculus: Part 1.* Addison-Wesley Publishing Co. 1967.

[5] N. Piskunov. *Cálculo Diferencial e Integral.* Editorial MIR. Moscú, 1969.