Capítulo 0

Introducción

1. Cálculos y piedras

Desde la escuela primaria usamos la palabra *calcular* con el significado de *obtener un resultado mediante operaciones aritméticas*, también se dice *hacer cuentas*. La palabra 'cálculo' viene del latín, *calcúlus*, que significa piedra o guijarro y se refiere al más antiguo procedimiento matemático conocido usado por el ser humano desde épocas prehistóricas, el de establecer **correspondencias biunívocas**:

> Suponemos que al salir con su rebaño, el pastor prehistórico colocaba una piedrecilla en una bolsa, o en una pila, por cada oveja a su cuidado. Al regresar, por cada oveja que entraba, quitaba una piedra. Si quedaban piedras en la bolsa habría que buscar las ovejas extraviadas.

El pastor verificaba que existiera una *correspondencia biunívoca* entre las piedras depositadas, que representan las ovejas que salieron, y las ovejas que iban entrando, es decir, que llegaran *tantas* ovejas *como* salieron. Quizá la calculadora portátil más antigua fue una bolsa de piedras o, en su forma más elaborada, un collar de cuentas. Después inventamos los números y más adelante otros objetos matemáticos, a los procedimientos para manipularlos seguimos llamándoles 'cálculos'. Se habla de calcular el área de un terreno, de calcular la distancia a un astro, de calcular la velocidad de un proyectil, o de calcular el tiempo transcurrido durante un suceso. Hay cálculo numérico (hoy día con grandes cifras, o de mediciones muy precisas, efectuados mediante poderosas computadoras), cálculo vectorial (con vectores que, entre otras cosas, representan fuerzas o velocidades), cálculo matricial (con matrices podemos representar grandes sistemas de ecuaciones), y cálculo diferencial e integral (tema del presente libro).

También usamos el término "cálculo infinitesimal" para referirnos al *cálculo diferencial* y al *cálculo integral*. ¿Por qué les llamamos así, y les mencionamos juntos? ¿De qué tratan? Veamos la página siguiente y comencemos …

Dicho en pocas palabras, el término "cálculo infinitesimal" significa cálculo de *infinitésimos* y se refería, en una época, a procedimientos para manipular esos objetos —considerados cantidades distintas de cero pero tan pequeñas que carecían de múltiplos.

Un tipo de manipulación de infinitésimos se realiza comparando diferencias. Si queremos comparar avance con tiempo dividimos la diferencia en posición entre la diferencia en tiempo. Restamos de la posición final la posición inicial y dividimos entre la diferencia que hay del tiempo final al tiempo inicial. Estamos comparando dos diferencias, **posición final menos posición inicial**, el espacio recorrido, y **tiempo final menos tiempo inicial**, el tiempo transcurrido. Al dividir el espacio recorrido entre el tiempo transcurrido obtenemos la llamada *razón de cambio* de la posición respecto del tiempo. Cuando nos interesan los cambios de posición en intervalos más y más pequeños de tiempo transcurrido estamos en el terreno del cálculo diferencial.

Tenemos un segundo tipo de manipulación de infinitésimos; añadiendo, sumando o *integrando* para, mediante consideraciones sobre partes de un objeto, concluir propiedades sobre el total, al estilo de cuando cubrimos un círculo con rectángulos y consideramos la suma de las áreas de los rectángulos como *una* aproximación al área del círculo. Al cubrir el contorno del círculo con rectángulos más y más pequeños, más *ceñidos* le quedarán y mejor será la aproximación que obtengamos del área del círculo mediante la suma del área de los rectángulos que lo cubren. Estamos en el terreno del cálculo integral.

> Sucede que estos dos tipos de manipulación constituyen operaciones inversas, así como la suma y la resta (casi), de ahí su tratamiento conjunto.

La sorpresa es que los procedimientos inversos entre sí del cálculo diferencial y del cálculo integral, llamados *diferenciación* e *integración*, en realidad **no operan** sobre "cantidades distintas de cero pero tan pequeñas que carecen de múltiplos" llamadas, alguna vez, infinitésimos sino que los cocientes de diferencias y las añadiduras o sumas se manipulan mediante el concepto de *límite* que involucra, a su vez, nuestra concepción de *número real*.

Así,

> el término "cálculo infinitesimal" se refiere, hoy día, a la manipulación de diferencias y sumas mediante el proceso de límite.

Empleando de nuevo unas cuantas palabras, el término "límite" **no** se refiere a una situación de la cual no podemos pasar —para ello usamos, en matemáticas, el término "cota", como una valla— sino un estado el cual **finalmente** obtendremos, continuando un proceso. La idea de número real es parte del núcleo profundo de nuestra concepción de espacio.

Dijimos muchas cosas en una sola página pero emplearemos buena parte del libro para explicarlas. Mientras tanto, en las secciones de este capítulo introductorio, presentaremos algunos problemas que originaron la necesidad o condujeron a manipular diferencias y sumas, particularmente en pequeños intervalos, y describiremos las herramientas usadas. El estudio de cada herramienta ocupará, más adelante, varios capítulos. Finalizaremos con un breve repaso histórico de la construcción de tan importante disciplina matemática, obra de generaciones de científicos: el cálculo diferencial e integral.

2. Tangentes

Ya mencionamos un problema que nos lleva a comparar diferencias, el de obtener la razón de cambio de la posición respecto del tiempo, que estudiaremos ampliamente a lo largo del libro. También veremos, en el capítulo 6, que comparar diferencias es como trazar secantes a una curva, y que estudiar el comportamiento de una razón de cambio en intervalos más y más pequeños de tiempo transcurrido —tratando de averiguar lo que sucede en un *instante*— es como trazar una tangente a una curva. Debemos tener cuidado para definir este importante concepto de *tangente a una curva*.

La primera definición que se nos ocurre es de una recta que toca a la curva en un solo punto. ¿Como ésta?:

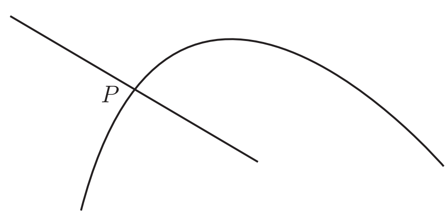

Figura 0.1 Recta que toca a la curva en solo el punto P. ¿Es la tangente?

En realidad no es lo que esperábamos, cuando dijimos que la recta tangente tocara en un solo punto a la curva pensamos que la curva estuviera de un *solo* lado de la recta, *no* que la recta cruzara, imaginamos algo así:

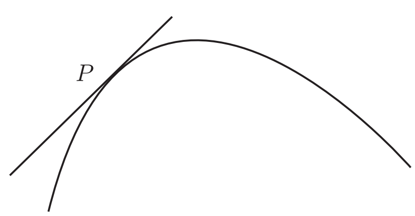

Figura 0.2 La recta no cruza la curva.

Pero no imaginamos la situación presentada en la figura 0.3 en donde *alrededor* del punto P la curva está de un solo lado de la recta que nos gustaría llamar tangente, sin embargo esa recta cruza la curva en el punto Q. Algo falla en la propuesta para definir recta tangente en un punto, parece que debemos pedir condiciones sobre la recta tangente **alrededor** del punto en cuestión.

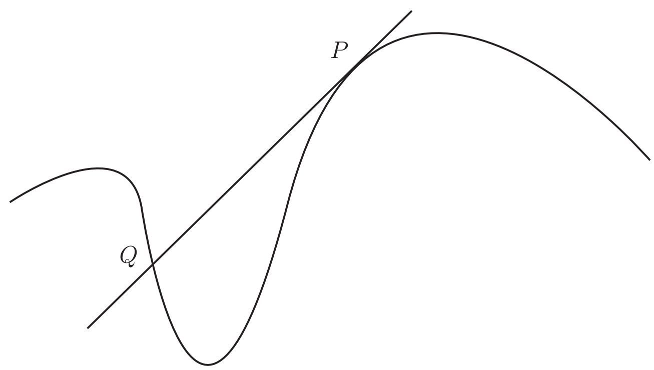

FIGURA 0.3 La recta cruza la curva en Q pero ¿no es tangente en P?

Modifiquemos la propuesta e intentemos otra definición, que la recta tangente a una curva en un punto P sea una recta que, en su comportamiento *alrededor del punto* P, toque a la curva en ese punto, sin cruzarla (si la recta cruza a la curva, que lo haga lejos del punto P). La descripción de esta definición incluye a la recta de la figura anterior, pero ¿qué hacemos entonces con la figura 0.4?

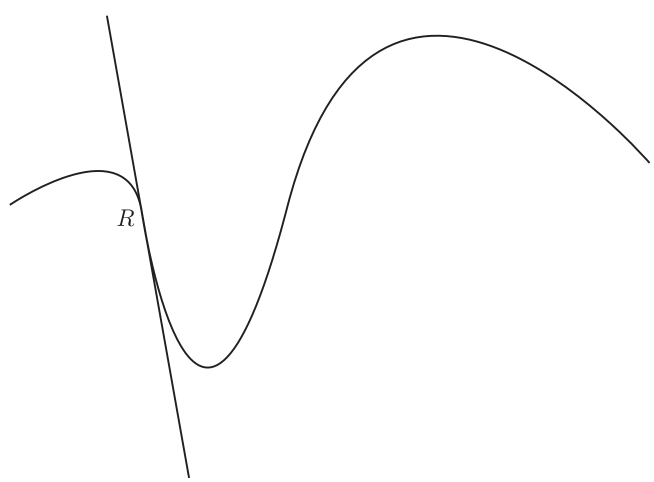

FIGURA 0.4 Ahora la recta, aunque cruza la curva en R, es tangente en R.

Sucede que las supuestas definiciones de recta tangente a una curva no describen lo que pensamos.

Desde los griegos se trazaban tangentes a figuras determinadas, EUCLIDES definió tangente a un círculo como una recta que toca al círculo sin cruzarlo, y encuentra la manera de trazarla, APOLONIO enseña a trazar la tangente a un punto de una parábola, a una elipse y a una hipérbola, sin tener un método de aplicación general. Fueron DESCARTES (con sus *normales*) y, de manera independiente y polémica, FERMAT (mediante sus *adecuaciones*), en el siglo XVII, quienes **esbozaron** el método de aproximar la tangente a la curva en el punto P mediante secantes —rectas que atraviesan la curva en dos puntos— que pasan por P y por otros puntos de la curva más y más cercanos a P, que lleva al concepto de *límite*.

Se puede hacer de varias maneras, una es trazando una recta del punto P (donde se quiere encontrar la tangente) en la curva a otro punto Q cualquiera sobre la curva en cuestión.

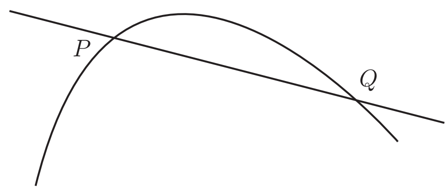

FIGURA 0.5 La recta de P a Q es una secante a la curva.

Después, trazar otra secante de P a un punto más cercano que Q, sobre la curva, a P, digamos R. Continuar de la misma manera y trazar la secante de P a S, y acercarnos a P por medio de puntos sobre la curva trazando las secantes de P a esos puntos cada vez más y más cercanos a P.

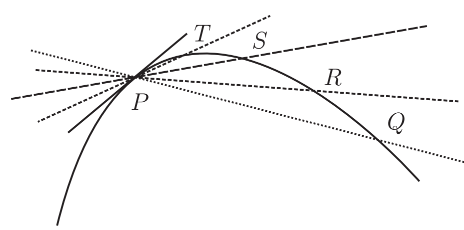

FIGURA 0.6 Secantes que pasan por P y por puntos Q, R, S y T sobre la curva más y más cercanos a P.

Tenemos, así, un *proceso* de obtener un estado, **la recta tangente en P**, como estado ***límite*** de otros, **las secantes trazadas de P a puntos sobre la curva más y más cerca de P**.

La posición *límite* de las secantes trazadas de P a puntos situados sobre la curva, más y más cercanos a P, es la tangente a la curva en el punto P.

Esta manera de considerar una recta tangente a una curva lleva al concepto de *derivada* (ver capítulo 6), idea desarrollada por NEWTON y LEIBNIZ alrededor de 1680 pero formalizada 140 años más tarde con las aportaciones de CAUCHY en la primera mitad del siglo XIX.

3. ÁREAS

El problema que nos lleva a manipular sumas es hallar el área de una figura. Hay tres ideas principales para atacar el problema. Una **idea** fundamental para resolver el problema era conocida desde las antiguas civilizaciones:

> Para hallar el área de una figura hay que *descomponerla* en otras cuya área sea conocida, el área de la figura original es la suma de las áreas de las figuras en que se descompone.

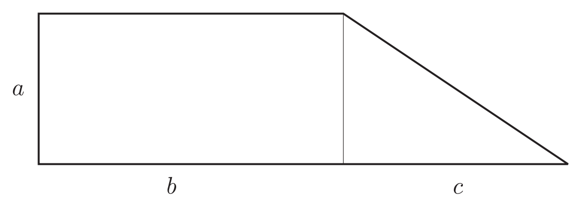

FIGURA 0.7 Ejemplo sencillo donde una figura se descompone en dos cuya área conocemos: área total = área del rectángulo + área del triángulo = $ab + \frac{1}{2}ac$.

Otra idea importante, atribuida a EUDOXO, presentada por EUCLIDES, es el método de *exhaución*, que aplicada para hallar el área de un círculo consiste en

> *Aproximar* el área del círculo mediante polígonos inscritos incrementando más y más el número de sus lados.

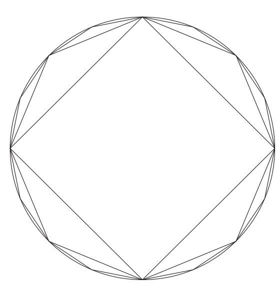

FIGURA 0.8 Los polígonos inscritos en el círculo tienen área cada vez más y más *parecida* al área del círculo.

La tercer idea se conoce como el método de las *rebanadas*. Se descompone una figura en delgadas rebanadas, método que se aprecia mejor en una generalización del problema de hallar el área, que es hallar el volumen.

> Se piensa, por ejemplo, a una esfera rebanada en infinidad de círculos, sumando el área de cada uno de ellos se obtendría el volumen de la esfera.

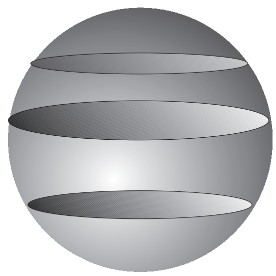

FIGURA 0.9 Esfera rebanada

Presentado de manera simplista, el rectángulo de base b y altura a se *rebanaría* en infinidad de rectas verticales, cada una de longitud a, tendríamos la longitud a considerada tantas veces como puntos hubiera en la longitud b, ese *barrido* de los segmentos de longitud a a lo largo del segmento de longitud b daría el área del rectángulo $A = ab$.

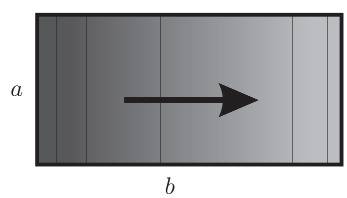

FIGURA 0.10 El rectángulo de base b y altura a *rebanado* y *barrido* por segmentos de longitud a.

El concepto moderno para determinar áreas de figuras planas cuyos contornos son líneas curvas se basan en estas tres ideas. En general,

> **La figura se cubre con rectángulos, la suma de sus áreas será una aproximación al área de la figura.**
>
> **Subdividimos más y más los rectángulos y sumamos las áreas de los que cubren la figura. Obtenemos una mejor aproximación de su área.**
>
> **Continuando este proceso, en el límite, obtendremos el área de la figura.**
>
> **Al proceso le llamamos *integración*.**

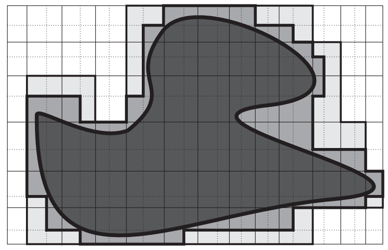

FIGURA 0.11 Si subdividimos más y más los rectángulos, la suma del área de los que cubren la figura será más y más parecida al área de la figura. En el *límite* obtenemos el área de la figura original.

Quienes aplican esta idea para obtener el área bajo una curva son FERMAT y ROBERVAL en el siglo XVII con su manera de calcular el área bajo una parábola.

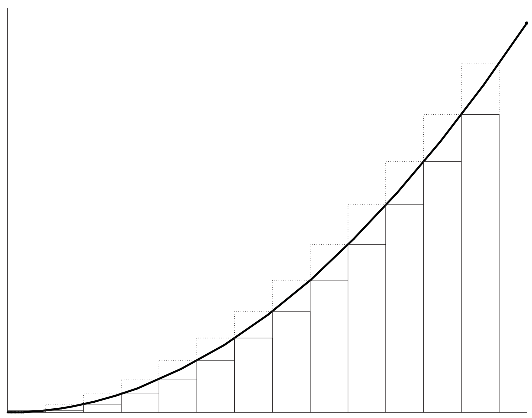

FIGURA 0.12 El área bajo la parábola se *atrapa* entre rectángulos por arriba de la curva y rectángulos por abajo. Se obtienen sumas aproximadoras por *exceso* y por *defecto*.

De aquí sólo hay un paso al concepto de *integral* desarrollado de manera independiente y casi simultánea por NEWTON y LEIBNIZ a quienes se les considera los inventores del Cálculo pues, a diferencia de sus antecesores inmediatos que también se ocuparon de los problemas de hallar tangentes y áreas, fueron quienes comprendieron que los procesos de *derivación* e *integración* son procesos inversos —a manera de la suma y la resta— pero esto es tema del capítulo 10.

4. MÁS Y MÁS CERCA

Consideramos la tangente a una curva en un punto como la posición *límite* de secantes, generando el concepto de *derivada*. Al área de una figura la obtenemos como *límite* de áreas de rectángulos inscritos, o rectángulos aproximadores, construyendo el concepto de *integral*. La pregunta obligada es **¿qué es *límite*?**

En matemáticas,

> el concepto de **límite** es la expresión formal de nuestra concepción intuitiva de *cercanía*, o de *muy aproximado*.

Como siempre que se trate de definir un concepto —y hacer, de dicha definición, objeto de manipulación algebraica— debemos verificar que la definición adoptada *realmente* describa el objeto, concepto o situación que pretendemos definir, pero que, además, describa **sólo** a **ese tipo** de objeto.

Al hablar de una *posición límite* pensamos en una posición a la cual **más y más nos acercamos conforme más y más tiempo transcurra**. Pero es necesario ser más enérgicos con la expresión **"más y más"** para que exprese el significado que le queremos asignar —como dijera HUMPTY DUMPTY.

La clave del asunto radica en expresar no sólo que nos acerquemos a la posición límite, sino que nos acerquemos **tanto como queramos**.

> De hecho el concepto a formalizar es que si L es la posición límite, P denota la posición del proceso y damos una medida de cercanía ε (letra griega *épsilon*) arbitraria, por pequeña que sea, siempre será posible hallar la cantidad de tiempo transcurrido suficiente para que el proceso P diste de la posición L en menos que la medida ε.

Así, cuando usamos la expresión **"más y más cerca conforme más y más tiempo transcurra"** la empleamos en el sentido de que **podemos decir** a partir de qué momento el proceso **dista** del límite en **menos** que una cantidad **prefijada**.

Estamos usando la medida prefijada de cercanía como un reto. Retamos al proceso P a que se acerque a L en menos que ε. Si L es realmente el límite debe poder responder al reto. La respuesta, en este caso, consiste en decir **en qué momento** el proceso P va a lograr la cercanía prefijada.

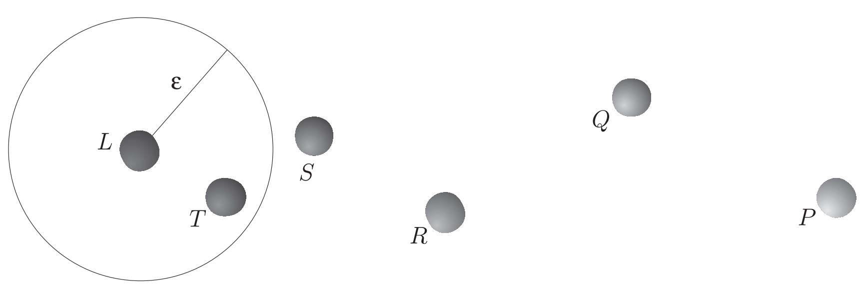

FIGURA 0.13 A partir de cierto momento la posición está más cerca del límite L que la distancia prefijada ε.

Como en las otras secciones de este capítulo introductorio, lo dicho en estos párrafos es descripción informal del concepto mencionado. En el capítulo 4 trataremos el concepto de límite, analizaremos con detenimiento su definición y estudiaremos sus propiedades para poder manejarlo algebraicamente.

5. Puntos y números

Hemos hablado de tiempo transcurrido y de espacio recorrido presuponiendo un comportamiento *continuo* de dichas magnitudes de tiempo y espacio. Falta todavía describir de manera formal el objeto matemático con el cual representamos tiempo y espacio: los *números reales*.

Se recorrió un largo camino desde la concepción de número de los griegos hasta la necesidad expresada por Dedekind y Cantor en el siglo XIX de que el tratamiento riguroso del Cálculo debía tener fundamento aritmético en lugar de basarse en la intuición geométrica —útil como recurso didáctico.

Aunque ha sido tratado de diferentes maneras, el procedimiento se conoce como la **construcción** de los números reales. Partimos de los conocidos *quebrados*, *fracciones* o *razones* —llamados *los números racionales*, denotados con $\mathbb{Q}$. Identificamos cada número racional con un punto en una recta. Según el procedimiento que estudiaremos en el capítulo 2 identificamos con cada punto de una recta un número racional y percibimos que hay puntos de la recta que **no** corresponden a racionales, como $\sqrt{2}$, a los cuales llamamos números irracionales —en lugar de fracciones, corresponden a decimales que no terminan (sin ser periódicos). A la colección de esos dos tipos de números, los racionales y los irracionales, le llamamos los *números reales*, que denotamos con $\mathbb{R}$.

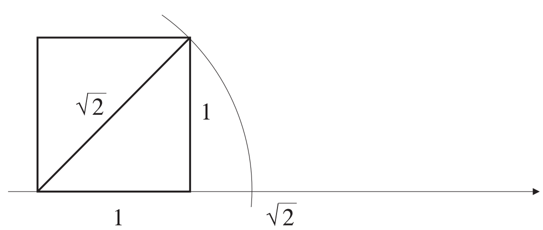

Figura 0.14 La longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos miden la unidad no se puede expresar como fracción.

Ya sea que la construcción de los números reales se realice mediante las *cortaduras* de Dedekind o las *sucesiones fundamentales* de Cantor, disponemos de la estructura de los números reales, que representan de manera satisfactoria nuestra idea intuitiva del comportamiento del transcurrir del tiempo o del desplazamiento de un cuerpo por una trayectoria recta.

En el ámbito del recurso didáctico —que es la referencia geométrica— disponemos ahora, para nuestro estudio, de la identificación de la recta numérica con los números reales. Podemos representar, por ejemplo, el transcurrir del tiempo con un desplazamiento de un punto a otro en la recta numérica.

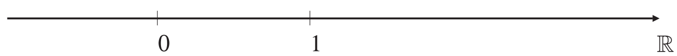

FIGURA 0.15 La recta real.

De hecho, mediante los números reales representaremos varios tipos de cantidades *variables* cuyo comportamiento nos aparezca como el de los números reales, como serían temperaturas, distancias, volúmenes, presión y muchas más.

6. ESTAR O NO ESTAR

Lograda la construcción de los números reales a partir de los racionales, para completar el proceso de formalización de los fundamentos del Cálculo, según lo percibió DEDEKIND, es necesario caracterizar los números naturales, y junto con ellos a los racionales, en términos de la nueva **teoría de conjuntos**, teoría creada por CANTOR cuando en su descripción de los números reales habla de *puntos límite* de un conjunto, introduce el concepto de **vecindad** de un punto y distingue cuándo en dicha vecindad hay infinidad de puntos.

En el fundamento de la teoría de conjuntos está el concepto de *correspondencia biunívoca* que usaba el pastor prehistórico del comienzo del presente capítulo y que CANTOR usó en 1879 para comparar conjuntos infinitos y caracterizarlos según su *potencia* o su *número cardinal* —*cardinalidad* del conjunto— generalizando el concepto de *número de elementos* en un conjunto finito.

> Los conjuntos finitos tienen un cierto número de elementos. Los conjuntos infinitos tienen un *número transfinito* de elementos o *cardinalidad transfinita*.

A la cardinalidad o potencia de los números naturales se le llama **“alef cero”** que se escribe $\aleph_0$ (alef es la primera letra del alfabeto hebreo), a la cardinalidad de los números reales se le llama la **potencia del continuo** y se denota con $\mathfrak{c}$ (una letra “c” minúscula en tipo gótico).

> Dos conjuntos tienen la misma potencia o cardinalidad si existe una correspondencia biunívoca entre ellos.

DEDEKIND considera que un conjunto C queda determinado como tal —está *bien definido*— si dado *cualquier* objeto queda determinado, a su vez, si el objeto en cuestión **es un elemento del conjunto C o no lo es**. A partir de conjuntos bien definidos se construyen operaciones entre ellos, como la **unión** y la **intersección**, así como la relación de **contención** que se refiere a que los elementos de un conjunto sean elementos de otro, dando origen al concepto de *subconjunto*.

Además, al concepto de correspondencia biunívoca se añade el de *función* como manera de asociar a elementos de un conjunto, elementos de otro (o de sí mismo), en particular el de función *inyectiva*, en que a elementos distintos se les asocian, mediante la función, elementos distintos.

Estos conceptos de conjunto, conjunto infinito, función inyectiva y *sucesor* (referente a que, en un conjunto, cada elemento tenga asociado *el elemento "siguiente"*) están en la base de la caracterización de los números naturales, tema estudiado en la década de 1880 por PEANO y FREGE además de DEDEKIND.

> Al caracterizar los números naturales basados en los conceptos de conjunto y función obtenemos una base aritmética del Cálculo desprendiéndolo, así, de su referencia al mundo físico que le dió origen. Podemos construir entonces una teoría del Cálculo diferencial e integral a partir de objetos matemáticos. Su carácter abstracto nos permite usar sus conceptos para estudiar fenómenos en distintos campos de la ciencia.

7. PRESENTACIÓN DEL CÁLCULO

Hemos dado un esbozo de cómo evolucionó el Cálculo partiendo de los problemas de trazo de tangentes a curvas y de búsqueda de áreas de figuras mediante aproximaciones, que dan lugar al concepto de límite, y a los conceptos fundamentales e inversos del Cálculo, la **derivada** y la **integral**. Cómo, a lo largo del siglo XVIII y en el siglo XIX, se trabajó en formalizar el concepto de límite, la construcción de los números reales a partir de los racionales y la caracterización de los números naturales a partir de la teoría de conjuntos. En está evolución hay un tema principal, las sumas infinitas o series, que trataremos en su momento.

Ahora debemos comenzar con una exposición sistemática del tema —es el objetivo del libro. Para que la presentación elegida se nutra de cómo evolucionó cada tema particular, al final de cada capítulo hay una NOTA HISTÓRICA. Al final de la obra tenemos un MUSEO donde exhibimos material biográfico de quienes aportaron al tema. También damos una CRONOLOGÍA donde podrán ubicar fácilmente épocas, personas y aportes.

La exposición elegida no es una presentación que siga el desarrollo conceptual del Cálculo sino que, echando mano del recurso didáctico de la referencia geométrica y de fenómenos físicos —el problema de trazar la tangente es idéntico, desde el punto de vista matemático, al de calcular velocidades—, trataremos el tema según su estructura formal. Partiremos del estudio del lenguaje de los conjuntos —que no la teoría— para describir la correspondencia entre el objeto geométrico de **recta** y el algebraico o aritmético de **número real**. Después veremos las más importantes propiedades de la estructura de los números reales, definiendo los conceptos —como *vecindad*— que nos permitirán, más adelante, hablar de límite. Definiremos el concepto de *función* y veremos cómo resolver el problema de trazo de la tangente a una curva para el caso en que la curva se pueda expresar como la *gráfica de una función*, pero de un tipo de función muy particular: una función *real de variable real* —soluciones más generales se analizan en temas más avanzados, como el Cálculo en *varias variables*. Después estudiaremos los conceptos de derivada e integral de funciones reales de variable real, y sus propiedades. Más adelante veremos cómo se utilizan estos conceptos para estudiar problemas del mundo real —se llaman sus *aplicaciones*— y daremos presentaciones elementales de temas avanzados.

8. Nota histórica

En tanto que un esbozo **muy** general —que describimos brevemente en esta sección— podemos ubicar cinco etapas fundamentales en el desarrollo histórico del Cálculo, la **antigüedad**, los **griegos**, la época de **Fermat, Descartes y otros**, la época de **Newton y Leibniz**, y la **formalización del Cálculo**. En la nota histórica de cada capítulo presentaremos de manera más amplia los aportes de cada etapa al tema que nos ocupe, dejando al Museo los detalles de vidas y épocas.

La antigüedad

Alrededor de 1780 a.C., en la cultura babilónica tenían una manera de calcular el área de un círculo conociendo la medida de la circunferencia: $A = (C/2)(d/2)$, donde C es la circunferencia y d el diámetro. Se especula que usaron el método de las rebanadas.

En el *papiro de Rhind*, documento jeroglífico de la cultura egipcia, escrito alrededor de 1650 a.C., se afirma que el área del círculo de diámetro d es igual al área del cuadrado de lado $\frac{8}{9}d$

Quizá desde 1500 años a.C., en versos llamados *Vedas*, en la India, aunque las primeras referencias escritas son apenas de alrededor del 600 a.C., se plantea el problema de la cuadratura del círculo en referencia a la construcción de un altar cuadrado que tenga la misma área que uno circular.

Durante los años 206 a.C.-220 d.C., se compilaron los *Jiuzhang suanshu* (*Nueve capítulos acerca del arte matemático*), la obra clásica de la matemática china, donde hay una aproximación al área de un semicírculo mediante el área de un trapecio.

Los griegos

Alrededor del 430 a.C. Hipócrates de Quíos plantea el problema de la cuadratura de *lúnulas* —con la forma de fase lunar— que son figuras acotadas por dos arcos circulares de distinto radio.

A los pitagóricos se les atribuye la frase de que "*el número es la substancia de todas las cosas*". Al descubrir que el lado de un cuadrado y su diagonal son longitudes *inconmensurables*, es decir que no se pueden medir a partir de una unidad común, se causó un escándalo, ¿cómo comparar razones entre magnitudes inconmensurables?

EUDOXO (408-355 A.C.) estableció la base del método de exhaución. Junto con el aporte de ARQUÍMEDES según la propiedad que lleva su nombre —suele llamarse también la *propiedad del continuo*— forman parte del concepto de número real desarrollado en el siglo XIX, tienen ya la idea de **límite** y son parte de la construcción de la definición de **integral**.

Aportación fundamental de ARISTÓTELES (384-322 A.C.) fue distinguir dos tipos de *cantidades*: la *discreta*, referida al *número*, cuya base es la unidad indivisible, usado para contar, y la *continua*, referida a la *magnitud*, que es "divisible en divisibles que son infinitamente divisibles", asignada a rectas, superficies, volúmenes y tiempo.

Realmente nada se sabe de la vida de EUCLIDES, se ha deducido que vivió en la época de PTOLOMEO I SOTER quien gobernó del 323 A.C. al aproximadamente 283 A.C., impartió clases y escribió en el MUSEO Y BIBLIOTECA DE ALEXANDRÍA, vivió antes que ARQUÍMEDES pero después que PLATÓN. Escribió los *Elementos* hace aproximadamente $2,300$ años. En los *Elementos*, sistematizó varios teoremas de EUDOXO y dió bases firmes a lo expuesto de manera informal por sus predecesores. En la definición 2 del Libro III, describe lo que hoy entenderíamos como una tangente a un círculo.

Sobre las mediciones del círculo es una breve obra de ARQUÍMIDES de SIRACUSA (287-212 A.C.) donde muestra cómo hallar el área de un círculo de radio dado conocida la circunferencia. Un resultado —antecedente del concepto de **integral**— está en su tratado *Cuadratura de la parábola* donde inscribe figuras rectilíneas cada vez más ceñidas al área del segmento de parábola. Logra que el área de las figuras inscritas —obtenida por medio de una suma infinita— difiera del área del segmento de parábola en menos de un valor prefijado. Su demostración está basada en el método de exhaución.

APOLONIO de PERGA (250-175 A.C.) en su obra *Cónicas*, en el Libro I, analizó el problema de trazar la tangente a una parábola en un punto dado, pensándola, como EUCLIDES, como recta que toca pero no cruza la curva. Asimismo mostró cómo trazar tangentes a elipses y a hipérbolas.

FERMAT, DESCARTES Y MUCHOS MÁS

Recordemos que desde el mundo antiguo se disponía sólo de algunas curvas para la investigación, esencialmente las cónicas descritas por APOLONIO, quienes trataban con ellas resolvían sus problemas, en particular el trazo de tangentes y el cálculo de áreas, pero no existía un **método**, o procedimiento con validez general —tampoco era necesario. Se podían trazar tangentes y calcular áreas en cada caso particular conocido. Con el revolucionario aporte de FERMAT y DESCARTES que proponen una manera de tratar *algebraicamente* problemas *geométricos*, el mundo científico dispone súbitamente de multitud de nuevas figuras geométricas representantes de situaciones algebraicas y se renuevan los esfuerzos por hallar tangentes y calcular áreas.

Cavalieri y las rebanadas, Wallis y los infinitesimales, Hudde y Sluse con sus métodos para obtener "derivadas" de expresiones algebraicas

Newton y Leibniz

Formalización