CAPÍTULO 1

EL LENGUAJE DE LOS CONJUNTOS

1. CONSIDERACIONES INICIALES

G. CANTOR definió, en 1897, un **conjunto** como *"cualquier colección en un universo M de objetos definidos y separados m, producto de nuestra intuición o de nuestro pensamiento"*, concepción que requirió de una posterior formalización por ZERMELO, en 1908, pues es difícil concebir una definición de conjunto expresada en lenguaje cotidiano —siempre usaríamos sinónimos.

Es muy útil la caracterización que dió DEDEKIND en 1888, aunque usó la vaga descripción de que *"un conjunto es un objeto de nuestro pensamiento, es como una cosa"*. Afirmó que un conjunto C está *bien definido* si dado *cualquier* objeto está determinado si **es un elemento del conjunto C o no lo es**, lo cual permite trabajar con conjuntos sin tener que definirlos estrictamente, teniendo cuidado de no colocarnos en situaciones paradójicas, como en la llamada **paradoja del barbero** donde se plantea la situación de un único barbero que afeita sólo *a quien no puede hacerlo por sí mismo* y se "define" a B como el "conjunto" de las **personas a quienes afeita el barbero**.

B no está bien definido como conjunto pues no está determinado si el barbero, a quien denotaremos con b, pertenece o no a B. Si b pertenece a B, entonces b es una de las personas a quienes afeita el barbero ¡pero b es el barbero! Es decir, b es afeitado por b, luego b se afeita a sí mismo y, por lo tanto, b no puede ser de las personas que afeita el barbero, es decir, no es elemento de B. Suponer que b pertenece a B **implica** que b no pertenece a B. Es fácil obtener la conclusión recíproca: suponer que b **no** pertenece a B y concluir que b **sí** pertenece a B.

> B **no está bien definido** como conjunto pues no está determinado si el objeto b **es** o **no es** un elemento de B.

Nos ahorraríamos el problema si desde un principio excluyéramos al barbero y escogiéramos un cierto *universo* de objetos con los cuales obtuviéramos conjuntos bien definidos, y así lo haremos de ahora en adelante al usar el lenguaje de los conjuntos. Trataremos con objetos pertenecientes a un *universo*, o *total*, denotado con Ω —omega mayúscula, la última letra del alfabeto griego— con los cuales formaremos (siempre) **conjuntos bien definidos**, es decir que

dado un conjunto C y un objeto x de Ω, está determinado si x es un elemento de C o no lo es.

Para efectos prácticos no siempre se menciona, de manera explícita, cuál es el conjunto universo Ω, supondremos que del contexto está claro cuáles son los objetos considerados y que los conjuntos están **bien definidos**.

Si C es un conjunto y x es un objeto (de Ω) que pertenece a C escribimos

$$x \in C,$$

que se lee *x es un elemento de C*, *x pertenece a C*, o simplemente *x está en C*. El símbolo '$\in$' para denotar pertenencia viene de la letra griega epsilon, ε, se usa como abreviación de la palabra griega *esti* que significa *está*.

En caso de que el objeto x no pertenezca al conjunto C, es decir no sea un elemento de C, escribimos

$$x \notin C.$$

Al referirnos a los elementos de un conjunto podemos describirlos:

El conjunto de los nombres de mis hermanos y hermanas,

o podemos listarlos:

Miguel Ángel, Rocío y Amelia.

Podemos considerar el universo Ω como los nombres de personas.

La descripción la escribimos así:

$$H = \{\,\text{nombres} \mid \text{son los de mis hermano(a)s}\,\},$$

que se lee: H es el conjunto de nombres *tales que* (la raya vertical "|" se lee *tal, o tales, que*) son los de mis hermano(a)s.

La lista la colocamos entre llaves:

$$H = \{\text{Miguel Ángel, Rocío, Amelia}\}.$$

Con símbolos escribimos

$$\text{Amelia} \in H, \qquad \text{mientras que} \qquad \text{Dora} \notin H.$$

Ejemplo 1. Escribimos la descripción del conjunto de los **continentes** de nuestro planeta como:

$$C = \{\,\text{continentes} \mid \text{son del planeta Tierra}\,\},$$

los listamos como:

$$C = \{\text{Africa, América, Asia, Europa, Oceanía}\}.$$

Simbólicamente,

$$\text{Asia} \in C, \qquad \text{mientras que} \qquad \text{Italia} \notin C.$$

Podemos considerar el conjunto universo Ω como los nombres de continentes, sin importar el planeta. ♦

Ejemplo 2. La **Comisión del Océano Índico** se creó en julio de 1982 con el objetivo de fomentar el desarrollo económico y la cooperación entre los países de la región del Océano Índico. Creada originalmente como una comisión bilateral entre Mauricio y Seychelles, la Comisión del Océano Indico creció al incluir entre sus miembros a Comores, Francia (en representación del departamento francés de ultramar de Réunion) y Madagascar en 1986. La comisión patrocina comités técnicos sobre pesca, turismo, transporte, educación y otros asuntos. La comisión recibe donaciones de la Unión Europea, el Fondo de Desarrollo de las Naciones Unidas y otras organizaciones.

Describimos a los países participantes en la Comisión del Océano Índico como

$$P = \{\,\text{países} \mid \text{participan en la Comisión del Océano Índico}\,\},$$

los listamos como

$$P = \{\text{Comores, Francia, Madagascar, Mauricio, Seychelles.}\}$$

Podemos escribir que

$$\text{Seychelles} \in P, \quad \text{y que, por ejemplo,} \qquad \text{Haití} \notin P.$$

El contexto en el que ubicamos este conjunto P es de países, y ese será el universo considerado. ♦

Ejemplo 3. Caracas, capital y principal ciudad de Venezuela, es el centro comercial e industrial del país. Las principales **industrias** de la ciudad son plantas de montaje de automóviles, de procesado de azúcar, cerveza y petróleo, fábricas de papel, tabaco, textiles y productos farmacéuticos. Describimos el conjunto

$$I = \{\,\text{industrias} \mid \text{son principales en Caracas}\,\},$$

lo listamos como

$$\begin{aligned} I = \{&\text{montaje de automóviles, procesado de azúcar, cerveza,}\\ &\text{petróleo, papel, tabaco, textiles, productos farmacéuticos}\}. \end{aligned}$$

Usando el símbolo de pertenencia a conjuntos, escribimos que tabaco $\in I$ y que acero $\notin I$. El universo se considera como los nombres de industrias. ♦

Actividad

En algún artículo periodístico escojan una noticia de actualidad y ubiquen varios ejemplos de conjuntos, descríbanlos, listen sus componentes y digan en qué universo están considerando los objetos. Escriban simbólicamente la pertenencia de algunos de sus elementos y ubiquen objetos del universo que no pertenezcan al conjunto en cuestión.

El lenguaje de los conjuntos es muy útil para describir situaciones, no sólo en matemáticas; pero para usar conjuntos deben estar *bien definidos* —no lo olvidemos—, **que dado un objeto del universo esté determinado si el objeto pertenece o nó al conjunto en cuestión**.

En las secciones siguientes definiremos operaciones entre conjuntos y veremos cómo usarlas para expresarnos de manera precisa acerca de diversos objetos según cumplan propiedades de pertenencia a diversos conjuntos.

PROBLEMAS 1.1

Describe, por medio de conjuntos, las situaciones siguientes:

1. Las temperaturas promedio de los 5 días anteriores.
2. Los días festivos del presente año.
3. Los estados del agua.
4. La vegetación de tu país.
5. Tus fronteras.
6. El producto interno bruto de los últimos diez años.
7. Los fenómenos meteorológicos que incidieron en tu región el año pasado.
8. Los planetas cercanos al Sol.

---

2. COMPLEMENTO Y SUBCONJUNTOS

Denotemos con Ω el universo de donde consideramos objetos y conjuntos bien definidos. Dado un objeto x de Ω y un conjunto C, está determinado si $x \in C$ o $x \notin C$. Por ejemplo, en la figura 1.1 vemos varios conjuntos y objetos o *puntos* —de hecho, a los elementos de un conjunto les llamaremos *puntos* del conjunto.

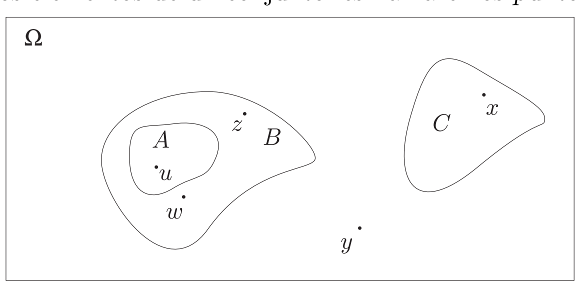

FIGURA 1.1 En el universo Ω vemos conjuntos y puntos.

Son evidentes las siguientes relaciones de pertenencia,

$$z \in B, \quad z \notin A, \quad y \notin C, \quad u \in A, \quad u \in B, \quad x \in C.$$

Hay un conjunto que no vemos, el **conjunto vacío** que no tiene elementos y denotamos con $\emptyset$. Dado cualquier objeto x del universo Ω tenemos que $x \notin \emptyset$.

No debe asustarnos este conjunto sin elementos, lo podemos pensar como el número cero: Si tengo 4 naranjas, doy 3 a Lupita y 1 a Juanito, ¿con cuantas naranjas me quedo? Pues con 0 naranjas. De manera análoga, si tengo una caja con pelotas rojas, amarillas y verdes, ¿cuál es el conjunto de las pelotas azules? Pues el conjunto vacío.

Hay una manera formal para definir, dado un determinado universo Ω, al conjunto vacío:

$$\emptyset = \{\, x \in \Omega \mid x \neq x \,\}$$

es decir, los elementos del conjunto vacío son los objetos de Ω que son distintos de sí mismos, ¿quién cumple esto? ¡Nadie! Luego el conjunto vacío no tiene elementos. Conforme avancemos verán la utilidad de disponer del conjunto vacío.

Dado un conjunto A los objetos del universo Ω pueden clasificarse en dos, los que pertenecen a A y los que **no** pertenecen a A. Al conjunto de los objetos de Ω que *no pertenecen a* A le llamamos el **complemento** de A y lo denotamos con A^c, que se lee *"A complemento"*, o con $\complement_\Omega A$, que se lee *el complemento de A respecto a* Ω, o escribimos $\complement A$ cuando no hay confusión respecto a qué universo tomamos el complemento del conjunto A.

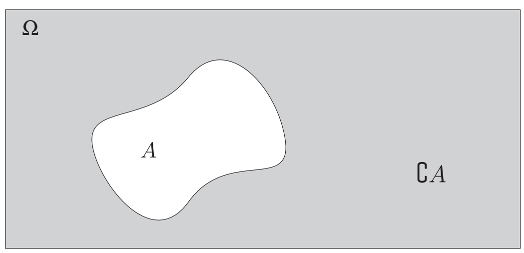

FIGURA 1.2 A y el complemento de A.

EJEMPLO 4. Según datos de la ONU, las principales **ciudades** del Perú cuentan con la siguiente población.

Lima	7,500,000
Callao	637,755
Arequipa	620,471
Trujillo	508,716
Chiclayo	410,486
Cusco	257,751

De las ciudades mencionadas, el conjunto A de las ciudades que tienen menos de 600,000 habitantes es $A = \{\text{Trujillo, Chiclayo, Cusco}\}$, el complemento de A es $A^c = \{\text{Lima, Callao, Arequipa}\}$, cuyos elementos son las ciudades del Perú que tienen 600,000 o más habitantes.

Si B es el conjunto de esas ciudades cuyo nombre comienza con la letra C, $B^c = \{\text{Lima, Arequipa, Trujillo}\}$. Del contexto se infiere que el conjunto universo considerado es

$$\Omega = \{\text{Lima, Callao, Arequipa, Trujillo, Chiclayo, Cusco}\}. \qquad \blacklozenge$$

Ejemplo 5. El grupo de pueblos indígenas mesoamericanos perteneciente a la familia Maya tradicionalmente han habitado en los estados mexicanos de Yucatán, Campeche, Tabasco y Chiapas, en la mayor parte de Guatemala y en regiones de Belice y Honduras. Denotemos con M al conjunto de países americanos donde habitan pueblos mayas, así,

$$M = \{\text{México, Guatemala, Belice, Honduras}\}.$$

Vemos que Ecuador $\notin M$, es decir, Ecuador está en el complemento de M que es el conjunto de los países americanos que *no* están en M. ♦

Actividad

¿Qué saben de astronautas? Averigüen sus nombres y clasifíquenlos usando el lenguaje de los conjuntos según el año en que viajaron, su género, nacionalidad y otros datos que les parezcan relevantes o interesantes. Comparen los resultados y presenten algunos de manera excluyente usando el concepto de *complemento*.

Puede suceder que objetos de un universo pertenezcan a varios conjuntos, como en la figura 1.1 donde $u \in A$ pero además $u \in B$, de hecho en esa figura todos los puntos de A pertenecen, a su vez, a B. Podemos decir que A está *contenido* en B, o que A es un *subconjunto* de B.

Ejemplo 6. Consideremos el conjunto universo $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y los conjuntos $A = \{\, x \in \Omega \mid x \text{ es múltiplo de } 4 \,\} = \{4, 8\}$ y $B = \{\, x \in \Omega \mid x \text{ es múltiplo de } 2 \,\} = \{2, 4, 6, 8\}$. Claramente cada múltiplo de 4 es un múltiplo de 2, luego A está *contenido* en B. ♦

Definición 1.1. *Si A y B son dos conjuntos y sucede que cada elemento de A es a su vez un elemento de B, es decir, que*

$$\textit{si} \quad x \in A \quad \textit{entonces} \quad x \in B,$$

*decimos que A es un **subconjunto** de B y lo escribimos*

$$A \subseteq B,$$

*que también se lee "A está **contenido** en B". Decimos también que B **contiene** a A, lo cual escribimos $B \supseteq A$.*

Si A ***no es*** subconjunto de B, es decir, ***existe algún*** elemento de A que no pertenece a B, escribimos $A \nsubseteq B$.

Ejemplo 7. La palabra *planeta* significa *vagabundo*. Se usaba para describir a las luces que se movían de manera regular en el cielo a lo largo del año, a diferencia de las estrellas, que permanecen fijas. Debido al descubrimiento de más objetos, que si bien orbitan alrededor del Sol no se perciben como vagabundos a simple vista, la XXVI Asamblea General de la UNIÓN ASTRONÓMICA INTERNACIONAL realizada en Praga en 2006, resolvió, el 24 de agosto, dividir en tres categorías los cuerpos celestes de nuestro Sistema Solar, de la siguiente manera:

1. Un **planeta** es un cuerpo celeste que: (a) está en órbita alrededor del Sol, (b) debido a su masa es casi redondo, y (c) ha *limpiado* su órbita de vecinos.
2. Un **planeta enano***, que debido a la observación en la nota al pie de página, nos tomaremos la libertad de llamar **planetoide**, es un cuerpo celeste que: (a) está en órbita alrededor del Sol, (b) debido a su masa es casi redondo, (c) **no** ha *limpiado* su órbita de vecinos y (d) no es un satélite.
3. Los **objetos pequeños del sistema solar**, conjunto que denotaremos con $OPSS$, son todos los demás que están en órbita alrededor del Sol, excepto los satélites.

Si denotamos con P al conjunto de los planetas del Sistema Solar, tenemos

$$P = \{\text{Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno}\}$$

y con PE al conjunto de los planetas enanos del Sistema Solar, tenemos que

$$\text{Ceres} \in PE, \quad \text{Plutón} \in PE \quad \text{y} \quad \text{Eris} \in PE.$$

Ceres tiene una órbita localizada en la región principal de asteroides que está entre Marte y Júpiter, y Eris está en una órbita que llega más allá que la de Plutón.

También se resolvió que Plutón es el prototipo de una nueva clase de objetos llamada **objetos transneptunianos**, que denotaremos con OTN. De hecho, la categoría de los objetos pequeños del Sistema Solar ($OPSS$) está formada actualmente por los asteroides del Sistema Solar, la mayoría de los objetos transneptunianos (OTN), los cometas y otros objetos pequeños.

Si denotamos por $CCSS$ al conjunto de los cuerpos celestes del sistema solar, vemos que el conjunto de los planetas enanos $PE = \{\text{Ceres, Plutón, Eris}\}$ es un subconjunto de $CCSS$, $PE \subseteq CCSS$.

---

* Aquí cabe una aclaración. Si nos referimos a una *camisa azul*, intentamos describir un objeto que, antes que nada, es una *camisa*, y de entre ellas, es una camisa de color *azul*. Es decir que el conjunto de las *camisas azules* está contenido en el conjunto de las *camisas*.

Realmente parece un desacierto que, según la definición, un *planeta enano* no sea *planeta*. En todo caso, si la intención de la UIA era que Plutón, Ceres, Eris y otros no fueran planetas, convendría designarlos con otro nombre, por ejemplo *planetoide*, por decir algo, pero se podría usar cualquier otra palabra, como *calcetín* o *flarios*.

Lo desafortunado es que al usar como nombre de la categoría un sustantivo (planeta) seguido de un adjetivo (enano), por gramática elemental, implica la pertenencia de sus elementos a la categoría más amplia de quienes describe el sustantivo, sin especificar el adjetivo; que es lo opuesto a lo que se pretende. En fin, esperemos que para la XXVII Asamblea en 2009 afinen sus definiciones. (Agradezco la sabrosa charla con Julia Espresate.)

Los planetas no son *todos* los cuerpos celestes del Sistema Solar. Es decir, hay algún cuerpo celeste (Plutón) que no está considerado entre los planetas. Decimos entonces que el conjunto de los planetas es un subconjunto **propio** del conjunto de los cuerpos celestes del Sistema Solar. ♦

Actividad

En una conferencia, Julia Espresate propuso describir un modelo del Sistema Solar en una escala en la que 1 metro equivale a 73,298 km. Colocando al Sol en el centro una ciudad, y utilizando esta escala para los demás objetos del sistema solar (tamaños y distancias), es posible percibir la magnitud y posiciones relativas de los Cuerpos Celestes del Sistema Solar. Ubiquen un lugar en su población y comparen la posición de los planetas con lugares conocidos de su población. ¿Dónde ubican en ese modelo al Cinturón de Kuiper?

Observamos que dado un conjunto A en un universo Ω, se cumplen las siguientes propiedades:

$$\text{(i) } \emptyset \subseteq A, \qquad \text{(ii) } A \subseteq A, \qquad \text{(iii) } A \subseteq \Omega.$$

La manera de verificar que las propiedades enunciadas son verdaderas es proceder a demostrarlas a partir de la definición. Sin entrar en detalles daremos una idea de cómo proceder.

La afirmación (ii) es evidente, cada elemento de A es un elemento de A, luego $A \subseteq A$. No se queda atrás la afirmación (iii) pues el conjunto A está formado de objetos de Ω, luego si $x \in A$ tenemos que $x \in \Omega$.

Presentamos una idea de demostración de la afirmación (i) con la intención de ejemplificar un tipo de razonamiento usado en matemáticas, se llama una *demostración por vacuidad* (dicho de manera directa, los elementos del conjunto vacío, ¡como no existen!, cumplen cualquier propiedad).

Para hacer ver que $\emptyset \subseteq A$ habría que verificar que cada elemento de $\emptyset$ es también un elemento de A. ¡Esto sucede! pues **no es posible** exhibir algún elemento de $\emptyset$ que **no** sea elemento de A (¡cómo exhibirlo, si no hay elementos en $\emptyset$!), luego **todos** los elementos de $\emptyset$ están también en A, es decir, $\emptyset \subseteq A$.

Truculento ¿verdad?, no se trata de que se aprendan el párrafo anterior, pero de seguro los pondrá a pensar.

Podemos resumir diciendo que:

(i) El vacío es subconjunto de cualquier conjunto, $\emptyset \subseteq A$.

(ii) Cualquier conjunto es subconjunto de sí mismo, $A \subseteq A$.

(iii) Cualquier conjunto es subconjunto del total, $A \subseteq \Omega$.

Hay un concepto que permite expresar la situación de que un conjunto A esté contenido en B pero *no sea todo* B, como en el ejemplo de los planetas.

Definición 1.2. *Sean A y B dos conjuntos tales que $A \subseteq B$. Si existe algún elemento $y \in B$ tal que $y \notin A$ decimos que A es un* ***subconjunto propio*** *de B y lo expresamos simbólicamente como*

$$A \subset B.$$

Decimos también que "A está ***contenido propiamente*** *en B" o que "B* ***contiene propiamente*** *a A", lo cual escribimos $B \supset A$.*

Las relaciones de *contención* y *contención propia* entre dos conjuntos cumplen con una propiedad importante, son **transitivas**, es decir que si A está contenido en B, y B está contenido en C, entonces A está contenido en C.

Con frecuencia se afirma que los matemáticos escriben con símbolos que nadie entiende y gozan con ser parte de los elegidos que los comprenden. Sucede que conforme avanzamos en una disciplina usamos lenguajes simbólicos que facilitan la comunicación. En matemáticas —también en música y hasta en tejido— usamos lenguaje simbólico para describir y transmitir situaciones que resultarían prácticamente incomprensibles si se comunicaran en lenguaje cotidiano, por ejemplo la expresión simbólica $f'(x)$ encierra multitud de consideraciones, según veremos en el capítulo 6. ¿Creen posible y práctico describir en lenguaje cotidiano la música escrita en una partitura de una sinfonía?

Tampoco se trata de usar exceso de simbología, de hecho la reduciremos lo más posible, pero éste es un buen momento para comenzar a comprenderla. ¿Practicamos?, la propiedad transitiva de la contención entre conjuntos dice que

$$\text{si } A \subseteq B \text{ y } B \subseteq C, \text{ entonces } A \subseteq C.$$

La expresión anterior tiene la forma "si {expresión 1} entonces {expresión 2}", que transformamos en

$$\{\text{expresión 1}\} \ \textbf{implica} \ \{\text{expresión 2}\},$$

en lugar de la palabra "implica" colocamos la flecha $\Longrightarrow$, obteniendo

$$\{\text{expresión 1}\} \implies \{\text{expresión 2}\}.$$

La transitividad de la contención entre conjuntos se expresa simbólicamente como

$$A \subseteq B \ \text{ y } \ B \subseteq C \implies A \subseteq C,$$

que se lee "A subconjunto de B y B subconjunto de C implica que A es un subconjunto de C".

No es tan complicado, poco a poco introduciremos más símbolos. Acabamos de exponer la propiedad transitiva de la contención, pero debemos demostrar que se cumple. Es relativamente fácil demostrar afirmaciones relacionadas con los conjuntos, primero enunciémoslo claramente. Dependiendo del peso que tenga en nuestra exposición, podemos enunciar el resultado como una Afirmación, una Proposición o de plano un Teorema, cuando el resultado se desprenda del teorema recientemente expuesto le llamamos Corolario. La transitividad de la contención en conjuntos la exponemos como una:

AFIRMACIÓN 1.1. *Si A, B y C son conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.*

DEMOSTRACIÓN. La hipótesis de la afirmación es que los conjuntos cumplen con que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Queremos demostrar que $A \subseteq C$, es decir, que si $x \in A$ entonces $x \in C$. Sea pues $x \in A$.

Como $A \subseteq B$ y $x \in A$, entonces $x \in B$, pero $B \subseteq C$ y $x \in B$, luego $x \in C$. Dado $x \in A$ hemos concluido que $x \in C$, luego $A \subseteq C$. ♦

Otra afirmación relaciona la contención de dos conjuntos con la contención de sus complementos, cuya demostración quedará como ejercicio.

AFIRMACIÓN 1.2. *Si $A \subseteq B$ entonces $B^c \subseteq A^c$.*

Misma que ilustramos en la figura siguiente,

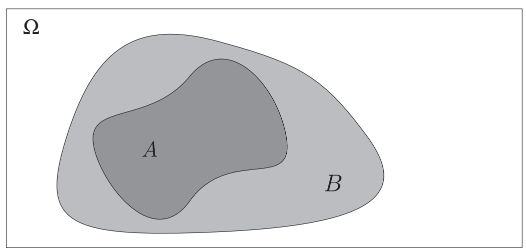

FIGURA 1.3 $A \subseteq B$ ¿pueden ver que $B^c \subseteq A^c$?

PROBLEMAS 1.2

1. Sea $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Halla todos los subconjuntos de Ω.
2. Si Ω es el conjunto de los elementos que aparecen en la **Tabla Periódica de los Elementos**, halla los siguientes subconjuntos de Ω: A el conjunto de los **metales alcalinos**, B el conjunto de los **actínidos** y C el conjunto de los **gases nobles**.
3. Denotemos con A el conjunto de países del continente americano. ¿Cuál es el subconjunto S de A formado por los países del subcontinente llamado **América del Sur**? Halla los siguientes subconjuntos de S: Los países andinos, los países donde el idioma *predominante* es el español, el complemento del anterior.

---

3. IGUALDAD Y OPERACIONES

Debemos trabajar con conjuntos bien definidos —ya lo sabemos— y tenemos las nociones de *pertenencia*, *complemento* y *subconjunto*, definamos ahora la igualdad entre conjuntos.

DEFINICIÓN 1.3. *Dos conjuntos A y B son* **iguales**, *lo escribimos $A = B$, si*

$$A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A.$$

Podemos expresar la definición de igualdad entre conjuntos usando el símbolo '$\Longleftrightarrow$' que representa la equivalencia lógica entre dos afirmaciones:

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A,$$

que se lee

> "A es igual a B **si, y sólo si**, A está contenido en B y B está contenido en A".

La expresión "*si, y sólo si,*" empleada en el recuadro anterior significa que las expresiones "$A = B$" y "$A \subseteq B$ y $B \subseteq A$" son equivalentes, que *significan lo mismo*, es decir que se cumplen estas dos afirmaciones:

(i) Si $A = B$ entonces $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
(ii) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$.

> Cuando debamos verificar que dos conjuntos A y B son iguales, debemos corroborar que cada elemento de A es elemento de B **y** *viceversa*: que cada elemento de B es elemento de A.

EJEMPLO 8. El conjunto P de los números primos menores que 10 es igual al conjunto $T = \{2, 3, 5, 7\}$ pues cada elemento de P es un elemento de T **y** cada elemento de T está en P. ♦

EJEMPLO 9. El complemento del conjunto vacío es el total: $\emptyset^c = \Omega$.

SOLUCIÓN. Según dice en el recuadro anterior, para verificar que dos conjuntos, digamos A y B, son iguales debemos corroborar que cada elemento del primer conjunto es un elemento del segundo y viceversa: que cada elemento del segundo conjunto es un elemento del primero. En este caso los conjuntos son $\emptyset^c$ y Ω, debemos hacer ver que $\emptyset^c \subseteq \Omega$ y que $\Omega \subseteq \emptyset^c$.

Sabemos que cualquier conjunto es subconjunto del total, así que $\emptyset^c \subseteq \Omega$. Ahora bien, si x está en Ω no puede estar en el vacío (nadie está), luego está en su complemento, es decir $x \in \emptyset^c$. ♦

EJEMPLO 10. El complemento del total es el vacío.

SOLUCIÓN. ¿La intentan? ♦

Actividad

Emplea como universo al conjunto de tus compañeros y compañeras de grupo. Describe diferentes situaciones de manera que resulten conjuntos iguales. Convence al grupo de que, en efecto, son iguales.

Las dos operaciones principales entre conjuntos son la **intersección** y la **unión**. La primera describe a los objetos **comunes** a los dos conjuntos, la segunda describe a los objetos **de los dos** conjuntos.

Definición 1.4. *El conjunto* ***intersección*** *de los conjuntos A y B está formado por los objetos que pertenecen a A* **y** *que pertenecen a B. Lo denotamos con $A \cap B$ y escribimos*

$$A \cap B = \{ x \in \Omega \mid x \in A \ \text{ y } \ x \in B \},$$

que se lee "A intersección B es igual al conjunto de los puntos x en Ω tales que x pertenece a A **y** *x pertenece a B".*

Definición 1.5. *El conjunto* ***unión*** *de los conjuntos A y B está formado por los objetos que pertenecen a A* **o** *que pertenecen a B,* **o** *pertenecen a ambos. Lo denotamos con $A \cup B$ y escribimos*

$$A \cup B = \{ x \in \Omega \mid x \in A \ \text{ o } \ x \in B \},$$

que se lee "A unión B es igual al conjunto de los puntos x en Ω tales que x pertenece a A **o** *x pertenece a B,* **o** *pertenece a ambos".*

Para que un objeto x pertenezca a $A \cap B$ **debe estar** en A y en B, debe estar en los dos conjuntos.

Para que un objeto x pertenezca a $A \cup B$ **basta** con que pertenezca a alguno de los dos, basta con que esté en uno de ellos.

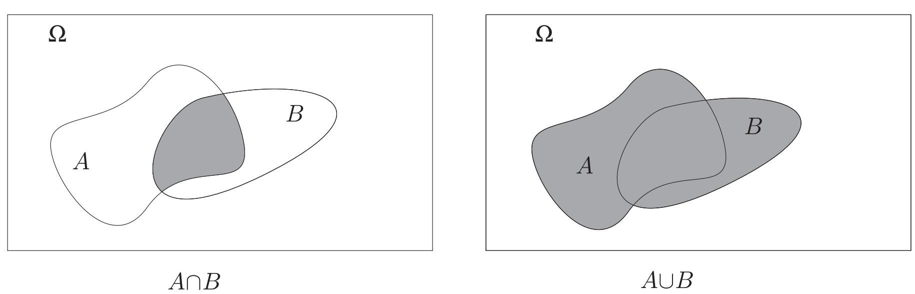

Figura 1.4 Las partes sombreadas representan la intersección y unión de dos conjuntos.

Ejemplo 11. Cualquier aleación de cobre y estaño se llama bronce. Hay muchas aleaciones que contienen pequeñas cantidades de otros materiales. Al añadir fósforo se obtiene resistencia al uso, el bronce con plomo sirve para hacer partes móviles, con níquel se obtiene dureza y sirve para hacer engranes, con silicón se hace más fuerte para rodamientos y es resistente a la corrosión, se usa para hacer partes de barcos. Hay otras aleaciones de cobre sin estaño que también se llaman bronce, como el cobre con aluminio llamado bronce de aluminio, el cobre con zinc llamado latón y el cobre con zinc y manganeso llamado bronce de manganeso.

Expresamos como conjuntos a las aleaciones anteriores:

$$\begin{aligned}
B &= \{\text{cobre, estaño}\},\\
F &= \{\text{cobre, estaño, fósforo}\},\\
P &= \{\text{cobre, estaño, plomo}\},\\
N &= \{\text{cobre, estaño, níquel}\},\\
S &= \{\text{cobre, estaño, silicón}\},\\
A &= \{\text{cobre, aluminio}\},\\
L &= \{\text{cobre, zinc}\},\\
M &= \{\text{cobre, manganeso}\}.
\end{aligned}$$

Claramente $F \cap N = B$, $M \cap A = \{\text{cobre}\}$, $S \cup P = \{\text{cobre, estaño, silicón, plomo}\}$ y $L \cup B = \{\text{cobre, estaño, zinc}\}$. ♦

Ejemplo 12. Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y los conjuntos $A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$ y $C = \{1, 3, 5\}$.

Tenemos que $A \cap B = \{2, 5\}$, $A \cap C = \{3, 5\}$, y que $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ y $A \cup B = \Omega$. ♦

Actividad

Considera el conjunto de países del continente americano. Averigüa qué organismos o asociaciones de países representan las siguientes siglas y establece relaciones de contención entre ellas, analiza las intersecciones y ve si la unión de varios organismos constituyen otro. Determina a qué organismos pertenece tu país y a cuáles no: FAO, OCI, ODECA, OEA, OLADE, OLAS, ONU, OPANAL, OPEP, OSPAAL, OTAN, TLC, UNESCO.

Definición 1.6. *Dos conjuntos A y B son* **ajenos** *si su intersección es vacía, es decir*

$$A \text{ y } B \text{ son ajenos} \iff A \cap B = \emptyset.$$

EJEMPLO 13. Como no existe cuerpo celeste del Sistema Solar que sea, simultáneamente, planeta y planeta enano, tenemos que $P \cap PE = \emptyset$, luego P y PE son conjuntos **ajenos**. ♦

EJEMPLO 14. Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$. Los conjuntos A y B son **ajenos** pues $A \cap B = \emptyset$. ♦

PROBLEMAS 1.3

Para los problemas del 1 al 5 considera que A es el conjunto de países del continente americano, y define:

$$T = \{\, x \in A \mid x \text{ limita con el Océano Atlántico} \,\},$$
$$P = \{\, x \in A \mid x \text{ limita con el Océano Pacífico} \,\}.$$

1. Obtén $T \cap P$.
2. ¿Es cierto que $T^c = P$? ¿Por qué?
3. Halla $(T \cup P)^c$.
4. Define dos conjuntos, Q y R, de elementos de A que sean ajenos y que $Q \cup R \subseteq T$.
5. Encuentra un conjunto S tal que $S \subset T \cap P$.
6. Si E es el conjunto de los países que tienen frontera con Perú y N es el conjunto de los países que tienen frontera con Venezuela, ¿Cuál es $E \cap N$ y $E \cup N$.
7. Usa los conjuntos definidos en el ejemplo 7. Halla OTN^c y $P \cup PE$. ¿Es cierto que $OTN^c = P \cup PE$?
8. Menciona un cuerpo celeste c del Sistema Solar tal que $c \notin P \cup PE$.

---

4. PROPIEDADES BÁSICAS

En esta sección, que servirá de referencia, enunciaremos las principales propiedades que cumplen las operaciones entre conjuntos y demostraremos algunas.

Cada operación es:

i) **Idempotente**, es decir, que $A \cap A = A$ y $A \cup A = A$.

ii) **Conmutativa**, es decir, que $A \cap B = B \cap A$ y $A \cup B = B \cup A$.

iii) **Asociativa**, es decir, que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ y $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

iv) Se cumplen las dos leyes **distributivas**, es decir, la unión distribuye a la intersección y la intersección distribuye a la unión: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Veamos algunas demostraciones. Recuerden que para demostrar que dos conjuntos son iguales hay que demostrar que se cumple la doble contención.

Afirmación 1.3. *Sean A, B y C tres conjuntos, las operaciones de intersección y unión cumplen estas dos propiedades llamadas* ***leyes asociativas****:*

1. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Demostración. Para demostrar la propiedad (1) de que los conjuntos $A \cap (B \cap C)$ y $(A \cap B) \cap C$ son iguales, debemos mostrar que se cumple la doble contención, es decir que

(i) $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$
y **(ii)** $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$.

Para comprobar que se cumple la contención (i) debemos verificar que cada elemento del primer conjunto también es un elemento del segundo conjunto, sea pues x en $A \cap (B \cap C)$, como $x \in A \cap (B \cap C)$ entonces $x \in A$ y $x \in B \cap C$, pero esto último implica que $x \in B$ y $x \in C$, tenemos así que $x \in A$ y $x \in B$ y $x \in C$, por lo tanto, $x \in A \cap B$ y $x \in C$, de donde $x \in (A \cap B) \cap C$, luego $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$.

De manera parecida comprobamos la contención (ii) —es como regresar por los pasos dados en el párrafo anterior— sea $x \in (A \cap B) \cap C$, entonces $x \in A \cap B$ y $x \in C$, es decir $x \in A$ y $x \in B$ y $x \in C$, por lo tanto, $x \in A$ y $x \in B \cap C$, de donde $x \in A \cap (B \cap C)$, luego $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$.

Al comprobar la doble contención (i) y (ii) hemos demostrado la veracidad de la primera propiedad, siguiendo un razonamiento análogo podrán demostrar la segunda. ♦

La **distributividad** es otra propiedad de las operaciones de intersección y unión entre conjuntos, nos dice de qué manera combinarlas.

Afirmación 1.4. *Sean A, B y C tres conjuntos, las operaciones de intersección y unión cumplen estas dos propiedades llamadas* ***leyes distributivas****:*

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Demostración. Demostremos la propiedad (1), se trata de demostrar la igualdad $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, para ello debemos mostrar que se cumple la doble contención

(i) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
y **(ii)** $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

Para demostrar la contención (i) debemos mostrar que cada elemento x en $A \cap (B \cup C)$ es, a su vez, un elemento de $(A \cap B) \cup (A \cap C)$,

sea pues $x \in A \cap (B \cup C)$,
esto implica que $x \in A$ y $x \in B \cup C$,
pero $x \in B \cup C \implies x \in B$ o $x \in C$.

Tenemos entonces que x está en A, eso es seguro, y, además, que x está en B o x está en C, es decir que x está en A y en B, o x está en A y en C, luego $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, lo cual implica que $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Como en la afirmación anterior, para demostrar la contención (ii) regresamos por los pasos que dimos para demostrar (i). Sea $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, por lo tanto, $x \in (A \cap B)$ o $x \in (A \cap C)$, es decir x está en A y en B, o x está en A y en C lo cual significa que x necesariamente está en A y puede estar en B o en C, de donde $x \in A \cap (B \cup C)$, obteniendo que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. Hemos demostrado la doble contención y con ello la propiedad (1). De manera análoga podemos demostrar la propiedad (2). ⧫

En la siguiente afirmación presentamos dos propiedades que relacionan las operaciones de intersección y unión con el concepto de complemento, se conocen como **leyes de De Morgan**.

Afirmación 1.5. *Si A y B son dos conjuntos, se cumplen las propiedades:*

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,

2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

La primera se lee "el complemento de la intersección es la unión de los complementos" y la segunda: "el complemento de la unión es la intersección de los complementos".

Demostración. Para demostrar la propiedad (1) es necesario mostrar la doble contención

(i) $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$,

y **(ii)** $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.

Ataquemos la contención (i),

$$\text{sea } x \in (A \cap B)^c,$$
$$\text{luego } x \notin A \cap B.$$

Si x no está en la intersección de A y B entonces x no pertenece a A o no pertenece a B (pues si estuviera en los dos estaría en la intersección), luego $x \notin A$ o $x \notin B$, es decir $x \in A^c$ o $x \in B^c$, de donde $x \in A^c \cup B^c$, mostrando así la contención (i).

Recíprocamente, para mostrar la veracidad de la contención (ii) suponemos que $x \in A^c \cup B^c$, luego $x \in A^c$ o $x \in B^c$, es decir x no está en A o x no está en B, luego no puede estar en la intersección de A y B, es decir $x \notin A \cap B$, de donde $x \in (A \cap B)^c$, con lo cual mostramos la contención (ii). Estas dos contenciones implican que se cumple la propiedad (1). La propiedad (2) se demuestra de manera análoga. ⧫

PROBLEMAS 1.4

1. Demuestra que cada operación —la intersección y la unión— es **idempotente**, esto es, si A es un conjunto se cumple que $A \cap A = A$ y $A \cup A = A$.
2. Demuestra que cada operación —la intersección y la unión— de conjuntos es **conmutativa**, esto es, si A y B son dos conjuntos se cumple que $A \cap B = B \cap A$ y $A \cup B = B \cup A$.
3. Sean $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 6, 7\}$ y $C = \{2, 3, 4, 6\}$. Verifica que se cumplen las **leyes distributivas**
4. Verifica que se cumplen las **leyes de DE MORGAN** para los conjuntos del problema anterior.
5. ¿Cuál será el resultado de $A \cap \emptyset$ y de $A \cup \emptyset$? Demuéstralo.
6. ¿Cuál será el resultado de $A \cap \Omega$ y de $A \cup \Omega$? Demuéstralo.

Demuestra las afirmaciones en los problemas del 7 al 10.

7. Si $A \subseteq B$ entonces $A \cap B = A$ y $A \cup B = B$.
8. $A \cap B \subseteq A$, para cualquier B.
9. $A \subseteq A \cup B$, para cualquier B.
10. Afirmación 1.2, si $A \subseteq B$ entonces $B^c \subseteq A^c$.

5. ALGO DE LÓGICA

Sucede, cuando avanzamos en el empleo del lenguaje, que no siempre logramos comunicar de manera precisa lo que pensamos y nos vemos en discusiones donde cada quien entiende lo que quiere entender y cada uno de nuestros interlocutores perciben cosas distintas. El lenguaje de los conjuntos ayuda para expresarnos con claridad de manera que personas distintas perciban la misma idea.

Hay quien piensa que *lo contrario* de “todas las pelotas son azules” es que “ninguna pelota es azul”, por lo que resultará útil ponernos de acuerdo en como usar la expresión **“lo contrario”**, asimismo debemos cultivar la capacidad de percibir las consecuencias *lógicas* de una afirmación.

ARISTÓTELES escribió su LÓGICA en la antigua Grecia, en el siglo IV A.C., donde expuso la manera de razonar por medio de silogismos, muy famoso es:

Todos los hombres son mortales,

Sócrates es hombre,

luego Sócrates es mortal.

Más de dos mil años después, en 1847, el inglés BOOLE basó la lógica matemática en el *cálculo proposicional*, esto es, la manipulación de *proposiciones* las cuales son afirmaciones que —a semejanza de los conjuntos bien definidos— tienen dos posibles *valores de verdad*, V o F.

Dada una proposición **es verdadera, V, o es falsa, F**. Si una proposición p es verdadera, su **negación**, que se escribe $\neg p$ y se lee "**no** p", es falsa. De hecho, dada una proposición p tenemos que p es verdadera o que $\neg p$ es verdadera. Resumimos lo anterior en la siguiente **tabla de verdad** donde se ilustran los valores de verdad de $\neg p$ dados los de p.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Ejemplo 15. La proposición

$$p\text{: Todos los hombres son mortales,}$$

es verdadera. Luego su negación

$$\neg p\text{: No todos los hombres son mortales,}$$

es falsa. ♦

Ejemplo 16. La proposición

$$q\text{: 10 es múltiplo de 3,}$$

es falsa, luego su negación

$$\neg q\text{: 10 \textbf{no} es múltiplo de 3,}$$

es verdadera. ♦

Usaremos la expresión **"lo *contrario*"** de una afirmación para referimos a su negación, así, la negación de "todas las pelotas son azules" es "no todas las pelotas son azules", ahora bien, dado un cierto conjunto P de pelotas, si la proposición

$$p\text{: todas las pelotas de } P \text{ son azules}$$

es verdadera, ello significa que tenemos la certeza de que dado **cualquier** elemento de P, que es una pelota, es azul. Pero si la proposición p anterior no es verdadera, es decir es falsa, la proposición que será verdadera es $\neg p$, es decir, lo cierto será que "no todas las pelotas de P son azules". ¿Esto significa que **ninguna** pelota de P es azul? La respuesta es **NO**, sucederá que en P habrá pelotas de otros colores, no importa de cuál otro color, pero **no todas** las pelotas de P son azules. Si la proposición

$$\neg p\text{: no todas las pelotas de } P \text{ son azules}$$

es verdadera, significa que ***al menos una* pelota en *P* no es azul**, es decir, que ***existe alguna* pelota en *P* que no es azul**.

> Cuando es falsa una afirmación sobre *todos* los elementos de un conjunto, sucede que al menos un elemento del conjunto no cumple con la afirmación.

EJEMPLO 17. ¿Es cierto que todos los nombres de los días de la semana, en español, comienzan con la letra "M"? La respuesta es **no**, ya que puedo exhibir al menos un nombre de día de la semana, a saber "Lunes", que no empieza con la letra "M". ♦

EJEMPLO 18. "Los planetas giran alrededor del Sol describiendo órbitas circulares." No es cierto. Al menos la Tierra gira alrededor del Sol describiendo una órbita elíptica. Hasta aquí llega la constatación de que la afirmación inicial no es verdadera. Hay más, KEPLER demostró que **todos** los planetas giran alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, pero ello no constituye la negación de la primera afirmación, sino que constituye una nueva afirmación. ♦

Si afirmamos que **todos** los elementos de un conjunto C cumplen con determinada propiedad p, debemos **mostrar** que dado **cualquier** elemento $x \in C$ se tiene que x **cumple** la propiedad p.

Si, por lo *contrario*, afirmamos que **no es cierto** que todos los elementos de C cumplen la propiedad p, lo cierto es que **existe al menos un elemento** $x \in C$ tal que x **no cumple** con la propiedad p.

EJEMPLO 19. ¿Es cierto que los nombres de los días de la semana, en español, tienen menos de diez letras? Dado cualquiera de los nombres podemos examinarlo y constatar que el nombre más largo "miércoles" tiene nueve letras, luego cada elemento del conjunto de los nombres de los días de la semana tiene menos de diez letras y la respuesta es **sí**. ♦

N.B. No es para el texto definitivo, pero no resisto ponerlo en el borrador:

EJEMPLO 20. Hay una expresión machista sobre las mujeres que dice

¡Todas son iguales!

La autoflagelación masculina asegura que lo anterior no es cierto pues

¡Hay algunas que son peores!

(Entra mariachi tocando *La que se fue*.) ♦

EJEMPLO 21. "No todo lo que brilla es oro." Cierto, hasta el cobre brilla. ♦

Presentamos una tabla con algunas afirmaciones y su respectiva negación.

Afirmación	**Negación**
Todos los x son p.	Algún x no es p.
Ningún x es p.	Algún x es p.
Algún x es p.	Ningún x es p.
Algún x no es p.	Todos los x son p.

Cuando afirman que una proposición es verdadera establecen una **conjetura**, es decir, una *presunción* de que su afirmación es verdadera. Las conjeturas, es decir las presunciones, habrían de confirmarse. Deben demostrar que se cumple una conjetura verificando que se cumple la afirmación realizada. Cuando una conjetura sea falsa debemos exhibir un **contraejemplo**, alguien para quien no se cumpla la afirmación.

EJEMPLO 22. CONJETURA: Todos aprobamos el examen. COMPROBACIÓN: ¿Cada uno del grupo aprobó el examen? Si la respuesta es afirmativa la conjetura fue cierta. Si algún elemento de los que presentaron examen no lo aprobó, la conjetura resultó falsa. ♦

Actividad

Construyan proposiciones acerca de un grupo de amigas y amigos. Establezcan conjeturas, demuestren las que sean ciertas y exhiban contraejemplos de las que resulten falsas.

> Hemos tratado con el concepto de *proposición*. Dada una proposición (una afirmación), sucede que es verdadera o falsa, una de dos, no puede haber indefinición —así como con un conjunto, dado un objeto sucede que pertenece al conjunto o no pertenece.

Un tipo de proposiciones son **abiertas**, se trata de afirmaciones cuyo *valor de verdad*, es decir, que la proposición sea verdadera, o que sea falsa, depende del objeto acerca del cual se realice la afirmación. Como el valor de verdad de la proposición **depende** de a quién se refiera la proposición, la denotaremos con $p(x)$, que se lee "p *de* x".

EJEMPLO 23. Sea la proposición abierta

$$p(x)\colon\ x \text{ tiene frontera con Perú},$$

donde x es un elemento de A, el conjunto de países del continente americano. Depende del *valor* de x el valor de verdad que tenga p, por ejemplo, si $x =$ Ecuador, entonces la proposición p es verdadera mientras que si $x =$ Paraguay, la proposición p es falsa. Escrito de otra manera, $p(\text{Ecuador})$ es una proposición verdadera, mientras que $p(\text{Paraguay})$ es una proposición falsa. Podemos definir el conjunto E como el conjunto de los países x para los cuales la proposición $p(x)$ es verdadera,

$$E = \{\, x \mid \text{es verdad que } x \text{ tiene frontera con Perú} \,\},$$

o bien,

$$E = \{\, x \mid p(x) \text{ es verdadera} \,\}.$$ ♦

Generalizando lo expuesto en el ejemplo anterior, sea Ω un conjunto universo y $p(x)$ una proposición abierta acerca de los objetos de Ω.

DEFINICIÓN 1.7. *El conjunto A de objetos de Ω para los cuales $p(x)$ es una proposición verdadera se llama el* ***conjunto de verdad*** *de p y se describe como*

$$A = \{\, x \in \Omega \mid p(x) \text{ es verdadera} \,\},$$

o, simplemente, $$A = \{\, x \in \Omega \mid p(x) \,\},$$

que se lee "A es el conjunto de las x en Ω tales que p de x".

AFIRMACIÓN 1.6. *Si $A = \{\, x \in \Omega \mid p(x) \,\}$ es el conjunto de verdad de p, entonces el conjunto de verdad de $\neg p$ es A^c.*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$B = \{\, x \in \Omega \mid \neg p(x) \,\}$$

el conjunto de verdad de $\neg p$. Queremos demostrar que $B = A^c$ para lo cual debemos mostrar que se cumple la doble contención $B \subseteq A^c$ y $A^c \subseteq B$. Para ver que se cumple la primera contención tenemos que hacer ver que cada elemento de B es un elemento de A^c. Si $x \in B$ entonces $\neg p(x)$ es verdadera, pero, según vimos en su tabla de verdad, $\neg p(x)$ es verdadera cuando $p(x)$ es falsa, lo cual implica que x **no está** en el conjunto de verdad de p, por lo tanto, está en su complemento, es decir $x \in A^c$. Hemos visto que $x \in B \Rightarrow x \in A^c$, luego $B \subseteq A^c$. Podemos regresar por los mismos pasos y mostrar que $A^c \subseteq B$, concluyendo la demostración de que $B = A^c$. ♦

Dadas dos proposiciones p y q es posible construir otras nuevas por medio de las operaciones de **conjunción** y **disyunción**. La conjunción de p y q es verdadera si el valor de verdad de **ambas**, p y q, es verdadero. Para que la disyunción de p y q sea verdadera **basta** que alguna de las dos sea verdadera.

DEFINICIÓN 1.8. *Sean p y q dos proposiciones, la* ***conjunción*** *de p y q, que se escribe $p \wedge q$ (se lee "p* **y** *q"), es verdadera si p es verdadera* **y** *q es verdadera, la tabla de verdad de $p \wedge q$ es:*

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

EJEMPLO 24. Veamos las proposiciones siguientes:

p: Todos los hombres son mortales,

q: Sócrates es hombre.

La proposición $p \wedge q$ es:

Todos los hombres son mortales **y** Sócrates es hombre.

Según el estado actual de las cosas, sabemos que **si** es verdad que todos los hombres son mortales, luego el valor de p es V, y también sabemos que Sócrates, el filósofo, es un ser humano, es decir el valor de q es V. Luego la proposición $p \wedge q$ es verdadera. ¿ Qué desprendemos de aquí? Nada, simplemente verificamos la veracidad de una conjunción de proposiciones. ♦

EJEMPLO 25. Consideremos las siguientes afirmaciones:

p: 7 es par,

q: Santiago es la capital de Chile.

La conjunción de las proposiciones p y q, a saber,

7 es par **y** Santiago es la capital de Chile,

es falsa pues p es falsa (el 7 no es un número par). No importa que q sea verdadera (sabemos que es verdad que Santiago es la capital de Chile). Para que la conjunción de dos proposiciones sea verdadera **es necesario** que las dos proposiciones sean verdaderas. ♦

Ejemplo 26. Averigüemos el valor de la conjunción de $p \wedge q$ en el caso de las proposiciones:

p: Soy millonario,

q: Nadie me quiere.

¡Uf! Las proposiciones parecen demasiado subjetivas como para someterlas a análisis, pero veamos las cosas con calma. Para que la conjunción de p y q, que se denota con $p \wedge q$, sea verdadera **es necesario** que tanto p como q lo sean. En este caso la conjunción de p y q se lee:

Soy millonario **y** nadie me quiere.

Como podrán imaginar, la veracidad de la conjunción **depende** de quién realice la afirmación. El ejemplo consiste en que cada lector se coloque como el emisor de las proposiciones p y q. Les pregunto, de manera individual: ¿Eres millonario? si me respondes que no lo eres, tendremos que p es falsa. Ahora es el turno de q: ¿Nadie te quiere? Si hay alguna persona que te quiera entonces q es falsa y, por lo tanto, la conjunción $p \wedge q$ es falsa. ♦

Recuerden,

> para que la **conjunción** de dos proposiciones sea verdadera es **necesario** que las dos lo sean.

Definición 1.9. *Sean p y q dos proposiciones, la **disyunción** de p y q, que se escribe $p \vee q$ (se lee "p **o** q"), es verdadera si p es verdadera **o** q es verdadera, **o** ambas lo son, la tabla de verdad de $p \vee q$ es:*

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

*Es decir, $p \vee q$ es verdadera si p **y/o** q es verdadera.*

Ejemplo 27. Consideremos las mismas afirmaciones del ejemplo 25:

p: 7 es par,

q: Santiago es la capital de Chile.

La disyunción de las proposiciones p y q, a saber,

$p \vee q$: 7 es par **o** Santiago es la capital de Chile,

es verdadera pues aunque p es falsa (el 7 no es par) sucede que q si es verdadera pues sabemos que es verdad que Santiago es la capital de Chile. ♦

Ejemplo 28. Sean las proposiciones p y q las siguientes:

p: 6 es par,

q: 6 es múltiplo de 3.

La disyunción $p \vee q$ es verdadera —para que sea verdadera **basta** que una de las proposiciones lo sea— pues sucede que, en este caso, las dos proposiciones son verdaderas. ♦

> Para que sea verdadera la **disyunción** $p \vee q$ de dos proposiciones **basta** que una de las dos, sea p o sea q, sea verdadera.

La disyunción lógica descrita choca con el uso cotidiano de la frase "p **o** q", empleada para expresar la elección entre dos alternativas, consideradas excluyentes: "¿subes **o** bajas?". Para expresar esa disyunción **excluyente** —en donde se pide que, una de dos, p sea verdadera o que q sea verdadera, pero que no **ambas** lo sean (el término **excluyente** se usa en el sentido de que la veracidad de una proposición **excluye** la veracidad de la otra)—, se pueden usar las operaciones de conjunción y disyunción definidas anteriormente, junto con la negación.

Definición 1.10. *Sean p y q dos proposiciones, la **disyunción excluyente** de p y q, que se denota con $p \veebar q$ y se lee "**una de dos**, p **o** q", es verdadera cuando p es verdadera **o** q es verdadera, **y**, además, **es falso** que p y q. Es decir,*

$p \veebar q$ tiene el mismo valor de verdad que $(p \vee q) \wedge \big(\neg(p \wedge q)\big)$.

Podemos construir la tabla de verdad de la **disyunción excluyente** en base a las operaciones básicas de **negación**, **conjunción** y **disyunción**, procedamos por partes:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	V	F
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

De lo anterior obtenemos que

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \big(\neg(p \wedge q)\big)$
V	V	V	F	F
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Es decir, la tabla de verdad de la disyunción excluyente es:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Si p y q fueran proposiciones abiertas y pensamos que A es el conjunto de verdad de p y B es el conjunto de verdad de q, el conjunto de verdad de $p \veebar q$ es

$$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c.$$

Definición 1.11. *La* ***diferencia simétrica*** *de A y B, se denota con $A \vartriangle B$ que se lee "A diferencia simétrica B", y se define como:*

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c.$$

El conjunto $A \vartriangle B$ representa a los puntos que están en A ***o*** *están en B* ***pero*** *no están en ambos.*

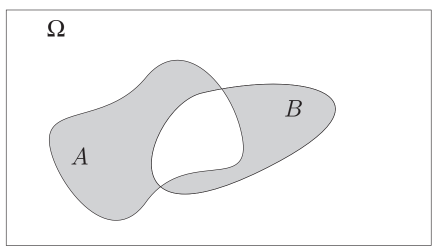

Figura 1.5 Los puntos que están en A **o** en B **pero no** en ambos.

Ejemplo 29. Si p y q son las siguientes proposiciones,

p: 20 es múltiplo de 5,

q: 20 es par,

enunciar las proposiciones $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$ y dar su valor de verdad.

Solución. Tenemos que p es verdadera pues, en efecto, el número 20 es múltiplo de 5 porque $20 = 5 \times 4$. Asimismo q es verdadera pues $20 = 2 \times 10$. Entonces

$\neg p$: 20 no es múltiplo de 5, es falsa.
$p \wedge q$: 20 es múltiplo de 5 y es par, es verdadera.
$p \vee q$: 20 es múltiplo de 5 o es par, es verdadera.
$p \veebar q$: 20 es, una de dos, múltiplo de 5 o es par, es falsa. ♦

Actividad

Junto con un grupo de amigas y amigos escriban una lista de afirmaciones. Analicen las afirmaciones, digan cuáles son proposiciones y den su valor de verdad. Enuncien y den el valor de verdad de la negación de cada proposición. Construyan nuevas proposiciones por medio de las operaciones de conjunción, disyunción y disyunción excluyente, digan el valor de verdad de cada una.

EJEMPLO 30. Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ un conjunto universo y las proposiciones abiertas

$$p(x)\colon x \text{ es par},$$

$$q(x)\colon x \text{ es múltiplo de } 3.$$

Halla los conjuntos de verdad de $\neg p$, $\neg q$, $p \wedge q$, $p \vee q$ y $p \veebar q$.

SOLUCIÓN. Los conjuntos de verdad de p y q son

$$\begin{aligned} A &= \{\, x \in \Omega \mid p(x) \,\} \\ &= \{\, x \in \Omega \mid x \text{ es par} \,\} \\ &= \{2, 4, 6, 8\}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B &= \{\, x \in \Omega \mid q(x) \,\} \\ &= \{\, x \in \Omega \mid x \text{ es múltiplo de } 3 \,\} \\ &= \{3, 6, 9\}. \end{aligned}$$

El conjunto de verdad de $\neg p$ es $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y el de $\neg q$ es $B^c = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, tenemos, además, que el conjunto de verdad de $p \wedge q$ —los pares de Ω que son múltiplos de 3— es

$$A \cap B = \{6\},$$

el conjunto de verdad de $p \vee q$ es

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\},$$

y el conjunto de verdad de $p \veebar q$ —una de dos, es par o es múltiplo de 3— es

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= \{2, 3, 4, 6, 8, 9\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\} \\ &= \{2, 3, 4, 8, 9\}. \end{aligned}$$

♦

PROBLEMAS 1.5

1. Di cuáles de las siguientes expresiones constituyen proposiciones, da su valor de verdad y enuncia su negación.

   p: Ayer llovió,

   q: Las aventuras de Sherlock Holmes,

   r: 7 es mayor que 15,

   s: Los países de América,

   t: Los caballos jadean,

   u: $3 \times 2 = 6$,

   v: '*Perenifolia*' significa *siempre con follaje*,

   w: Ni tú ni yo.

2. Enuncia la negación de las siguientes afirmaciones y di cuál es verdadera.

   a. Todos los gatos son pardos,

   b. Nadie es profeta en su tierra,

   c. Algunas aves emigran,

   d. Algunas serpientes no son venenosas,

   e. Ninguna máquina funciona,

   f. Hay ejercicios anaeróbicos,

   g. Todas las flores tienen pistilo,

   h. Algún planeta no tiene agua.

3. Dadas las conjeturas siguientes, explica cómo demostrar que es cierta, o cómo se probaría que es falsa.

   a. Todos asistirán a la Cumbre,

   b. Ningún huracán tocará tierra,

   c. Algún río se desbordará,

   d. Algunos países no firmarán el acuerdo,

4. Si Ω es el conjunto universo formado por las palabras en español, halla el conjunto de verdad de las siguientes proposiciones abiertas,

   $p(x)$: x es día de la semana,

   $q(y)$: y es el nombre de un dígito,

   $r(z)$: z contiene todas las vocales,

   $s(w)$: w es un personaje de '*100 Años de Soledad*'.

5. Completa la demostración de la afirmación 1.6.

6. Enuncia las proposiciones $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$ y da su valor de verdad.
   a. p: El *helio* es un gas inerte, q: Madrid es la capital de España.
   b. p: El *hielo* es agua sólida, q: Las ostras son mamíferos.
   c. p: *Alhaja* proviene del árabe, q: 9 es par.
   d. p: Acabó la pobreza, q: El aro es cuadrado.
7. Construye la tabla de verdad de $\neg(\neg p)$, $\neg p \vee q$ y $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.
8. Sea el conjunto universo
   $$\Omega = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}\}$$
   y las proposiciones abiertas
   $$p(x)\text{: } x \text{ comienza con } m,$$
   $$q(x)\text{: } x \text{ tiene tres vocales distintas,}$$
   $$r(x)\text{: } x \text{ tiene una } a,$$
   $$s(x)\text{: } x \text{ comienza con } e.$$
   Halla los conjuntos de verdad de $\neg p$, $\neg r$, $p \wedge r$, $q \vee s$ y $p \veebar q$.

---

6. Cómo razonar

A las operaciones de disyunción y conjunción de la sección anterior se les llama **conectivos lógicos**. Los podemos combinar, junto con la negación, y obtener los importantes conectivos de **implicación** y **bicondicionalidad**.

Definición 1.12. *Sean p y q dos proposiciones, la **implicación "si** p **entonces** q**"**, que se escribe $p \to q$ y también se lee p **implica** q, tiene el mismo valor de verdad que $\neg p \vee q$.*

Que la proposición $p \to q$ tenga el mismo valor de verdad que $\neg p \vee q$ significa que la tabla de verdad de ambas proposiciones es idéntica.

Como la tabla de verdad de $\neg p \vee q$ es:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

la tabla de verdad de la implicación es

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Es muy importante notar que para que la *implicación* sea verdadera **no es necesario** que haya una relación de causa-efecto entre las proposiciones.

EJEMPLO 31. Sean p y q las proposiciones

p: Ecuador tiene frontera con Perú,

q: El 8 es par.

La implicación $p \to q$, que se enuncia "**si** Ecuador tiene frontera con Perú, **entonces** el 8 es par", es verdadera pues según la tabla anterior, como p es verdadera y q es verdadera sucede que la implicación es verdadera. ♦

A la proposición p en la implicación $p \to q$ se le llama la *hipótesis* de la implicación, y a la proposición q se le llama la *conclusión*. Según se nota en la tabla de verdad de $p \to q$,

> la implicación *sólo* es falsa cuando la hipótesis p es verdadera y la conclusión q es falsa.

Esto significa que no admitiremos como implicación verdadera que, de una hipótesis verdadera se siga una conclusión falsa. Sin embargo,

> es una implicación verdadera que una hipótesis falsa implique una conclusión falsa,

y también

> es una implicación verdadera que una hipótesis falsa implique una conclusión verdadera.

Ilustremos con un ejemplo el significado de las afirmaciones anteriores y veamos que no van *tan* en contra de nuestro sentido común.

EJEMPLO 32. Consideremos la proposición "si llueve entonces voy al cine". Claramente es la implicación $p \to q$ de

p: Llueve,

q: Voy al cine.

La implicación puede ser verdadera o falsa. Veamos por casos:

CASO 1. Resulta que si llovió y, en efecto, fui al cine. Hice lo que dije, sin duda la implicación es verdadera.

CASO 2. Si llovió y decidí no ir al cine. No cumplí con lo pactado, la implicación es falsa.

CASO 3. No llovió y, aún así, decidí ir al cine. ¿Dejé de cumplir lo pactado? No, no deje de cumplir (de hecho no llovió), luego la implicación es verdadera.

CASO 4. No llovió y no fui al cine. ¿Alguien puede acusarme de no cumplir mi promesa? No, luego la implicación es verdadera.

Hemos verificado, en este ejemplo, que la implicación es falsa sólo cuando la hipótesis es verdadera y la conclusión es falsa. ♦

En la implicación $p \to q$, a la proposición p se le llama *una condición suficiente* para q. También se dice que q es *una condición necesaria* para p.

Podemos interpretar lo anterior de la siguiente manera, si la implicación $p \to q$ es verdadera,

> SUFICIENCIA: Para que q sea verdadera *basta* que p sea verdadera.
>
> NECESIDAD: Si p es verdadera, *necesariamente* q es verdadera.

EJEMPLO 33. Del ejemplo anterior, en los casos en que la implicación es *verdadera*, la *suficiencia* significa que para que sea cierto que fui al cine *basta* que haya llovido, y la misma implicación verdadera expresada en términos de *necesidad* es que si es cierto que llovió *necesariamente* fui al cine. ♦

DEFINICIÓN 1.13. *Sean p y q dos proposiciones, la* ***bicondicional "p si, y sólo si, q"****, que se escribe $p \leftrightarrow q$ y también se lee p* ***es condición necesaria y suficiente para*** *q, tiene el mismo valor de verdad que $(p \to q) \wedge (q \to p)$.*

De la tabla de verdad de $p \to q$ y de $q \to p$

p	q	$p \to q$	$q \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

obtenemos la tabla de verdad de $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Vemos que la *bicondicional* $p \leftrightarrow q$ es verdadera sólo en los casos en que tanto p como q tienen, ambas, el mismo valor de verdad.

La expresión "*si, y sólo si,*" se interpreta, en caso de que la bicondicional sea verdadera, como que p ocurre *si* q ocurre, pero, además, que q ocurre sólo si p ocurre. En términos de *suficiencia*, para que se cumpla q *basta* que p sea verdadera y, de manera ***recíproca***, para que p se cumpla *basta* que q sea verdadera. En términos de *necesidad*, para que q se cumpla debe cumplirse p y, de manera ***recíproca***, para que se cumpla p debe cumplirse q. Las consideraciones anteriores acerca de la bicondicional $p \leftrightarrow q$ explican por qué, en caso de que la bicondicional sea verdadera, p es condición necesaria y suficiente para q.

EJEMPLO 34. Analicemos esta versión ampliada del ejemplo 32, "si llueve es condición necesaria y suficiente para que vaya al cine". O, dicho de otra manera, con el mismo significado, "llueve si, y sólo si, voy al cine". Se trata de la bicondicional de las proposiciones

$$p\text{: Llueve,}$$
$$q\text{: Voy al cine.}$$

Nuevamente, veamos por casos:

CASO 1. Resulta que si llovió y, en efecto, fuí al cine. Hice lo que dije, sin duda la bicondicional es verdadera.

CASO 2. Si llovió y decidí no ir al cine. No cumplí con lo pactado, la bicondicional es falsa.

CASO 3. No llovió y, aún así, decidí ir al cine. No cumplí lo pactado. Dije que iría *sólo* si lloviera, luego la bicondicional es falsa.

CASO 4. No llovió y no fui al cine. No falté a lo pactado (no hubo condiciones), luego la bicondicional es verdadera. ♦

Hemos verificado, en este ejemplo, que la bicondicional es verdadera sólo cuando las dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad (ambas son verdaderas o ambas son falsas). Y hemos ilustrado cómo la bicondicional $p \leftrightarrow q$, cuando es verdadera, obliga a que si se cumple p también se cumple q ***y, viceversa***, si se cumple q debe cumplirse p.

Disponemos ahora de los conectivos lógicos, a saber, conjunción, disyunción, disyunción excluyente, implicación y bicondicional, además de la negación, con los cuales podemos construir nuevas proposiciones cuyo valor de verdad depende de los valores de verdad de las proposiciones constituyentes y se obtienen de la tabla de verdad de los conectivos.

EJEMPLO 35. A partir de las afirmaciones

$$p\text{: Voy a la playa,}$$
$$q\text{: Hace calor,}$$
$$r\text{: Llueve,}$$

construimos nuevas proposiciones y las enunciamos.

$$(q \wedge \neg r) \to p\text{: Si hace calor y no llueve, voy a la playa.}$$
$$q \to (\neg r \to p)\text{: Si hace calor entonces, si no llueve voy a la playa.}$$
$$p \leftrightarrow q\text{: Voy a la playa si, y sólo si, hace calor.}$$
$$(r \wedge \neg q) \to \neg p\text{: Llueve y no hace calor, entonces no voy a la playa.}$$
♦

Actividad

Quienes no vivan cerca de la playa podrán construir afirmaciones similares y adecuadas a sus condiciones climáticas y de posibilidades de diversión.

Un tipo de proposición que nos interesa de manera particular, es la que *siempre es verdadera*, independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones constituyentes, quizá el ejemplo más sencillo sea $p \vee \neg p$.

Otro tipo de proposición que nos interesa es la que *siempre es falsa*, independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones constituyentes, el ejemplo más sencillo es $p \wedge \neg p$.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	V	F
F	V	V	F

Definición 1.14. *Una **tautología** es una proposición que siempre es verdadera, una **contradicción** es una proposición que siempre es falsa, independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones constituyentes. Cualquier tautología se denota con V_0 y cualquier contradicción se denota con F_0.*

Ejemplo 36. Demostrar que $p \to (p \vee q)$ es una tautología.

Solución. Construimos la tabla de verdad de $p \to (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

y vemos que la proposición $p \to (p \vee q)$ siempre es verdadera, independientemente de los valores de las proposiciones constituyentes, luego se trata de una *tautología*. ♦

Ejemplo 37. Demostrar que $(p \wedge \neg q) \wedge q$ es una contradicción.

Solución. Construimos la tabla de verdad de $(p \wedge \neg q) \wedge q$

p	q	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \wedge q$
V	V	F	F
V	F	V	F
F	V	F	F
F	F	F	F

vemos que la proposición $(p \wedge \neg q) \wedge q$ siempre es falsa, independientemente de los valores de sus proposiciones constituyentes, luego se trata de una *contradicción*.

♦

La lección es que

> para saber si una proposición es tautogía debemos corroborar que siempre sea verdadera, independientemente de los valores de sus proposiciones constituyentes.

EJEMPLO 38. Si p y q son proposiciones, demostrar que $\neg(p \vee \neg q) \to \neg p$ es una tautología.

SOLUCIÓN. Hagámoslo en varios pasos, en una primera tabla colocaremos los valores de p, q, $\neg p$, $\neg q$ y $p \vee \neg q$,

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{\neg p}$	$\boldsymbol{\neg q}$	$\boldsymbol{p \vee \neg q}$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

A continuación construyamos la tabla para p, q, $\neg(p \vee \neg q)$, $\neg p$ y, finalmente, $\neg(p \vee \neg q) \to \neg p$.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{\neg(p \vee \neg q)}$	$\boldsymbol{\neg p}$	$\boldsymbol{\neg(p \vee \neg q) \to \neg p}$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	V

♦

DEFINICIÓN 1.15. *Si p y q son proposiciones tales que $p \to q$ es una tautología, decimos que p **implica lógicamente** a q y lo escribimos $p \Rightarrow q$*

DEFINICIÓN 1.16. *Si p y q son proposiciones tales que $p \leftrightarrow q$ es una tautología, decimos que p **es lógicamente equivalente** a q y lo escribimos $p \Leftrightarrow q$*

Quizá convenga que la parte siguiente que sería leyes de la lógica, reglas de inferencia y cuantificadores, fueran en un anexo (siento que este capítulo se está alargando demasiado, reconsiderar esto después). El anexo incluiría desde la sección 'Cómo razonar'. La sección llamada 'Algo de lógica' se llamaría proposiciones. Pensar bien esto, rehacerlo al final.

OJOJOJOJ: Ya está bien, hay que concluir y pasar a la NOTA HISTÓRICA del capítulo.