© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

CAPÍTULO 2

PUNTOS EN LA RECTA REAL

1. NÚMEROS NATURALES

Tradicionalmente se consideran números naturales a los que usamos para contar: *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, ... Algunos autores incluyen al *cero*, cosa que no haremos. Denotamos con $\mathbb{N}$ al conjunto de los *números naturales*,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Los negativos no son números naturales, ni las fracciones, ni los decimales son números naturales.

EJEMPLO 1. $5831 \in \mathbb{N}$, $-7 \notin \mathbb{N}$, $\pi \notin \mathbb{N}$, $2^{64} - 1 \in \mathbb{N}$, $0 \notin \mathbb{N}$, $\frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$. ♦

Pensemos los números naturales como fila de personas: hay quien comienza la fila, le llamamos el 1, a quien *le sigue* le llamamos el 2. No hay personas entre 1 y 2. Después del 2 hay quien le sigue, le llamamos el 3, y así sucesivamente. Vemos que cualquier persona en la fila tiene un lugar, digamos el lugar n: el lugar que le *antecede* es el $n-1$ y el lugar que le sigue es el $n+1$, *no hay personas colocadas entre dos sucesivas*, es decir, no hay números naturales entre el n y el $n+1$. Si consideramos varias personas de la fila siempre habrá quien esté situado *más adelante*.

EJEMPLO 2. Si $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$A = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots\}$$

de los números *pares* es un subconjunto propio de los números naturales, escribimos $A \subset \mathbb{N}$. ♦

EJEMPLO 3. Si $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$B = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots\}$$

de los números *impares* es otro subconjunto propio de los números naturales. ♦

De los ejemplos anteriores vemos que dado un número natural, una de dos, está en A o está en B, es decir, si $m \in \mathbb{N}$, una de dos, m es par o es impar. Los números pares son de la forma $2n$, con $n \in \mathbb{N}$, son múltiplos de 2. Los impares son de la forma $2n-1$, con $n \in \mathbb{N}$, no son múltiplos de 2.

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

AFIRMACIÓN 2.1. *Si p^2 es par entonces p es par.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que p no es par, entonces es de la forma $2n-1$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $p^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$, que es impar. Es decir, si tengo que p^2 es par y supongo que p es impar, llego a la conclusión de que p^2 es impar, lo cual constituye una contradicción. Luego la hipótesis de que p es impar es insostenible, luego p necesariamente es par. ♦

DEFINICIÓN 2.1. *Dado un número natural n, el número natural siguiente es $n+1$, llamado su* ***sucesor****.*

Todo número natural tiene sucesor y decimos que cada natural n es *menor* que su sucesor $n+1$ lo cual escribimos $n < n+1$.

DEFINICIÓN 2.2. *La relación de orden introducida por el concepto de sucesor es transitiva, es decir si m, n y $p \in \mathbb{N}$, tenemos que*

$$\text{si } m < n \text{ y } n < p, \text{ entonces } m < p,$$

lo cual se lee: "si m, n y p son números naturales y si m es menor que n y n es menor que p, entonces m es menor que p".

Hay dos propiedades de $\mathbb{N}$ que son equivalentes:

DEFINICIÓN 2.3. (PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN) *Cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.*

EJEMPLO 4. El conjunto C de los múltiplos de 7 es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, pues $28 \in C$, y 7 es el menor elemento de C. Noten que C ¡no tiene elemento máximo!, pues si $c \in C$, tenemos $c < 7c \in C$. Es decir, dado *cualquier* elemento de C *podemos hallar otro* elemento de C, a saber $7c$, mayor que el dado. ♦

EJEMPLO 5. Sea D el conjunto de naturales cuyo cuadrado es mayor que 2. Halla el elemento menor de D.

SOLUCIÓN. El 1 no puede ser el menor pues $1^2 = 1$ no es mayor que 2. Pero $2^2 = 4$ es mayor que 2. Como entre 1 y 2 no hay otro natural, resulta que el 2 es el mínimo de D. ♦

DEFINICIÓN 2.4. (PRINCIPIO DE INDUCCIÓN FINITA) *Si una afirmación acerca de un número se cumple para el 1 y si sucediendo que se cumple para el natural k se cumple para el sucesor $k+1$, entonces la afirmación se cumple para todos los números naturales.*

El siguiente ejemplo tiene su anécdota, en una ocasión estando en la escuela el después llamado *príncipe de las matemáticas*, CARL FRIEDRICH GAUSS, a la edad de 9 años, el maestro preguntó a los alumnos la suma de los 100 primeros números con afán de mantenerlos ocupados. La sorpresa fué que el niño GAUSS, no bien hubo enunciado el maestro el problema dió la solución: 5,050.

¿Cómo hizo para sumar casi de inmediato $1+2+3+4+5+6+7+\cdots+98+99+100$? En lugar de sumar $1+2=3$, $3+4=7$, $7+5=12$ y seguir así,

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

GAUSS se percató que tomados por parejas los sumandos, comenzando por los extremos, es decir 1 y 100, después 2 y 99, después 3 y 98, y así, hasta 50 y 51, la suma de cada pareja es 101. ¿Cuántas parejas hay? Como hay 100 sumandos, hay 50 parejas. Cada pareja suma 101 luego el total es $50 \times 101 = 5,050$.

Actividad

Digan, y expliquen cómo lo obtuvieron, cuál es el resultado de sumar los primeros 17 números naturales.

La anécdota anterior viene al caso porque hay una fórmula para hallar la suma de los primeros n naturales, cuya validez se demuestra usando el *principio de inducción finita* —también llamado *principio de inducción matemática*.

AFIRMACIÓN 2.2. *Para todo número natural n se cumple que*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos una afirmación acerca de todos los números naturales: si n es un número natural, la suma de los primeros n naturales es el número $\frac{n(n+1)}{2}$. Para verificar que dicha afirmación cumple con las premisas del *principio de inducción matemática* debemos verificar que:

(i) La afirmación se cumple para el número natural $n = 1$.

Veamos, la suma del primer sumando es, evidentemente, 1. Por otro lado, aplicando la fórmula para $n = 1$, la suma es $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Es decir, la fórmula da el resultado correcto para $n = 1$, luego se verifica el primer punto: la afirmación se cumple para el número natural $n = 1$.

(ii) Suponiendo que la afirmación se cumple para el número natural $n = k$, se cumple la afirmación para el natural $k + 1$.

Suponer que se cumple la fórmula para k significa suponer que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \tag{1}$$

a partir de lo cual verificaremos la validez de la fórmula para $k + 1$ que es la suma de los primeros $k + 1$ naturales:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1).$$

De la fórmula (1) sabemos que los primeros k términos suman $\frac{k(k+1)}{2}$, así, a la fracción anterior añadimos $k + 1$ para hallar la suma de los $k + 1$ términos:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \big(1 + 2 + 3 + \cdots + k\big) + (k + 1)$$

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$1+2+3+\cdots+(k+1) = \frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)}{2}.$$

Luego al suponer que la fórmula se cumple para $n=k$ obtenemos que se cumple para $n=k+1$.

Hemos verificado que se cumplen las premisas del principio de inducción matemática para el caso de la afirmación que nos ocupa, por lo tanto, dicha afirmación se cumple para todos los números naturales. Es decir: para todo número natural n sucede que

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad \blacklozenge$$

El ejemplo anterior ilustra una técnica de demostración llamada *demostración por inducción finita*, *demostración por inducción matemática* o, simplemente, *demostración por inducción*.

Actividad

Formen una fila de fichas de dominó, una ficha a continuación de otra, de manera que al derribar la primera derribe a la segunda y ésta, a su vez, derribe a la que le *sucede* y así hasta derribar toda la fila.

Definición 2.5. *Sea n un número natural, al conjunto de los primeros n naturales le llamamos el **segmento** S_n, es decir,*

$$S_n = \{1,2,3,\ldots,n\}.$$

*El segmento S_n tiene n elementos. Decimos que un conjunto A es **finito** y **tiene n elementos** si es posible establecer una **correspondencia biunívoca** entre A y S_n, lo escribimos $|A| = n$, que leemos: la **cardinalidad** de A es n.*

Ejemplo 6. El conjunto B de las letras de la palabra 'murciélago' tiene 10 elementos pues hay una *correspondencia biunívoca*, a saber,

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\mathrm{m} & \mathrm{u} & \mathrm{r} & \mathrm{c} & \mathrm{i} & \mathrm{e} & \mathrm{l} & \mathrm{a} & \mathrm{g} & \mathrm{o} \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10
\end{array}
$$

entre $B = \{\mathrm{m,u,r,c,i,e,l,a,g,o}\}$ y S_{10}, luego $|B| = 10$. ♦

Claramente no hay segmento S_n que pueda ponerse en correspondencia biunívoca con todo $\mathbb{N}$, luego $\mathbb{N}$ no es un conjunto finito, decimos que tiene un número *infinito* de elementos, que es **un conjunto infinito** y que su *cardinalidad* es $\aleph_0$, que se lee "*alef cero*" (alef es la primera letra del alfabeto hebreo), $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

Definición 2.6. *Si un conjunto infinito A se puede poner en correspondencia biunívoca con $\mathbb{N}$, decimos que A tiene cardinalidad $\aleph_0$ y lo escribimos $|A| = \aleph_0$.*

Según mencionamos en la sección **0.6**, hay varios tipos de conjuntos infinitos. El conjunto de los números naturales es un representante de la cardinalidad $\aleph_0$. A los conjuntos que puedan ponerse en correspondencia biunívoca con los naturales, es decir que tengan cardinalidad $\aleph_0$, se les llama **conjuntos numerables** o **enumerables**, en referencia al hecho de que podemos *formar* en fila a sus elementos y comenzar a llamarlos o enumerarlos con los números naturales: ***uno*** (señalando al primero), ***dos*** (señalando al que sigue), ***tres***, ..., y así sucesivamente.

Una peculiaridad de los conjuntos infinitos es que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con subconjuntos propios.

Afirmación 2.3. *Hay el mismo número de pares que de naturales.*

Demostración. Lo que afirma el enunciado es que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots\}$ de los números pares y el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Para demostrarlo hay que exhibir la correspondencia biunívoca, es decir, a cada número par asociar un número natural y a cada número natural asociar un número par,

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots & 2n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & \ldots \end{array}$$

Vemos que, en efecto, es posible establecer dicha correspondencia biunívoca, por lo tanto, podemos afirmar que *hay el mismo número de pares que de naturales*, es decir, que

$$|\mathbb{N}| = |A| = \aleph_0.$$

Observamos, además, que hemos colocado en correspondencia biunívoca al conjunto de los naturales con un subconjunto propio, mostrando una *parte* del mismo *tamaño* que el *todo*, lo cual nos lleva a pensar que la famosa frase que dice '*el todo es mayor que cada una de sus partes*' es válida sólo en el caso de conjuntos *finitos*. ♦

Actividad

Describan varios subconjuntos de los números naturales, digan cuáles son finitos y cuáles infinitos. Digan cuántos elementos tienen los conjuntos finitos y exhiban una correspondencia biunívoca con algún subconjunto propio de cada conjunto infinito.

Ahora que estamos familiarizados con los números naturales, veamos cómo representarlos en una recta. Para ello tracemos una recta horizontal pensándola como dirigida de izquierda a derecha, lo que indicamos con una flecha:

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

FIGURA 2.1 Recta dirigida.

A continuación ubiquemos un punto al cual llamaremos **origen**:

FIGURA 2.2 Un punto arbitrario O es el origen (sospechamos que después será el 0).

Después de señalar un origen en la recta dirigida, con un compás, con centro en O y radio U, que seleccionamos de manera arbitraria pero mantenemos fijo de ahora en adelante, trazamos un arco marcando un segmento a la derecha de O sobre la recta, al punto de cruce del arco con la recta le asignamos el número natural 1.

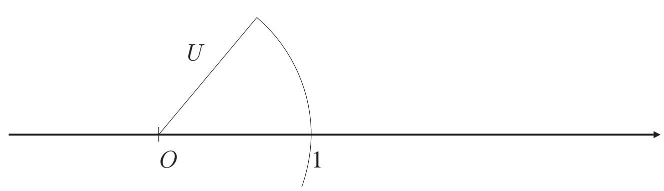

FIGURA 2.3 Al segmento U lo llamamos *unidad*, ubicamos el natural 1.

Esta construcción geométrica es la base la construcción de la **recta real**: consiste de una recta dirigida, un punto llamado origen (el cero), un segmento arbitrario considerado como **unidad** y el número 1 colocado en el extremo derecho de dicho segmento. Con centro en 1 y radio U, localizamos el 2, con centro en 2 y radio U ubicamos el 3 y así sucesivamente. Hemos identificado cada número natural con un punto en la recta real.

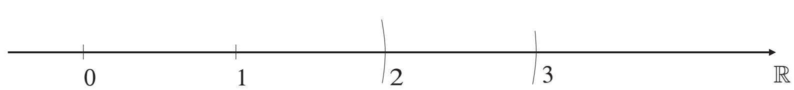

FIGURA 2.4 Los naturales en la recta real.

Hay, sin embargo, multitud de puntos de la recta real que no están ocupados por números naturales. Los números naturales están colocados sobre la recta real de manera que los separa un segmento unidad. Los naturales $\mathbb{N}$ son un conjunto **discreto** en la recta real. Con ello queremos expresar que dado un elemento hay un elemento sucesor, que existe *el elemento que le sigue*.

EJEMPLO 7. Los números pares forman un conjunto discreto en la recta real.

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

SOLUCIÓN. Dado un número par, al ser múltiplo de 2 tiene que ser de la forma $2n$ donde $n \in \mathbb{N}$, luego el número $2n + 2$ es el número par que sigue al $2n$. ⧫

EJEMPLO 8. Localiza los múltiplos de 3 en la recta real.

SOLUCIÓN. A partir de O medimos 3 unidades (con nuestro segmento U). El primer natural que dista del origen en 3 unidades es el número 3. Con centro en 3 y radio $3U$, localizamos el 6, con centro en 6 y radio $3U$ localizamos el 9, y así, el 12, 15, 18, continuando sucesivamente. ⧫

En el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales tenemos definidas dos **operaciones**: *suma* y *producto*. Son operaciones **cerradas**, lo cual significa que la suma de dos números naturales es un natural, y que el producto de dos números naturales es un número natural. Las operaciones cumplen con estas propiedades:

	Suma	**Producto**
Cerradura	$a, b \in \mathbb{N} \implies a + b \in \mathbb{N}$	$a, b \in \mathbb{N} \implies ab \in \mathbb{N}$
Conmutatividad	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Asociatividad	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a(bc) = (ab)c$
Distributividad	$a(b + c) = ab + ac$	

Además, en los números naturales tenemos definido un **orden**: cada número natural *es menor que su sucesor*. La relación de orden cumple con:

	Orden
Tricotomía	Si a y $b \in \mathbb{N}$, entonces $a < b$, $a = b$ ó $b < a$.
Transitividad	Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
Buen orden	Si $C \subseteq \mathbb{N}$ y $C \neq \emptyset$, entonces existe algún elemento $m \in C$ tal que $m \leq c$ para todo $c \in C$.

En resumen, en esta sección hemos identificado a los números naturales con ciertos puntos de la recta real.

PROBLEMAS 2.1

Para los conjuntos en los problemas del 1 al 4 contesta:

i) ¿Cuántos elementos tiene?
ii) ¿Está bien ordenado?
iii) ¿Hay algún subconjunto propio del conjunto dado que sea infinito?, ¿puedes exhibir una correspondencia biunívoca entre el conjunto dado y un subconjunto propio?

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

1. El conjunto T de los múltiplos de 3.
2. El conjunto P de los números primos menores que 100 (Los números primos son los naturales divisibles sólo entre sí mismos y la unidad.)
3. Los naturales que al dividirlos entre 8 dejan residuo 3.
4. Las potencias de 2.
5. Demuestra, por inducción, que
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$
6. Ubica en la recta real los siguientes subconjuntos de los números naturales:
   a. $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 120 < 2^n < 5000\}$, **b.** $H = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 16m,\ m \in \mathbb{N}\}$,
   c. $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 500 < n^3\}$, **d.** $F = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34\}$.

2. Números enteros

Una descripción breve y fácil de los números enteros es pensar a los naturales junto con su reflejo en un espejo colocado en el origen O. En lugar del origen O colocamos el número 0 (cero) y a la imagen en el espejo del natural n le llamamos $-n$. Denotamos con $\mathbb{Z}$ al conjunto de los números enteros,
$$\mathbb{Z} = \{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots,\ n,\ -n,\ \ldots\}.$$
La representación de los números enteros como puntos de la recta real la obtenemos a partir de los naturales colocando el número 0 en el origen y, con el mismo radio que hay de 0 a 1, con centro en 0 trazamos un arco del *lado izquierdo* del 0 y le llamamos -1. De la misma manera hallamos el *reflejo* del natural n: con centro en 0 y radio la abertura de 0 a n trazamos un arco, a la intersección del arco con el lado izquierdo de la recta real le llamamos $-n$.

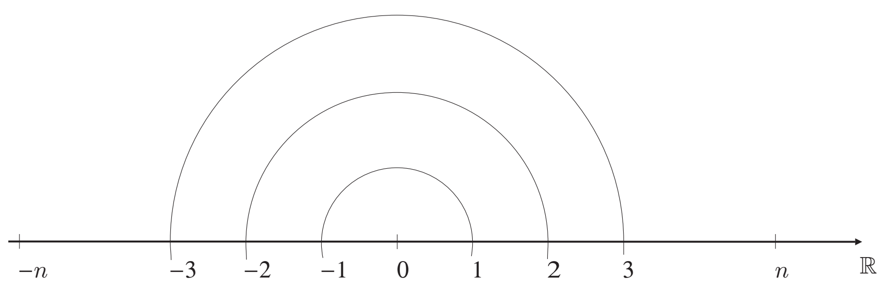

Figura 2.5 El conjunto $\mathbb{Z}$ en la recta real.

A los números a la derecha del cero les llamamos los **enteros positivos** y a los de la izquierda les llamamos los **enteros negativos**. Como ven, el conjunto de los números naturales es un subconjunto propio del conjunto de los números enteros, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, es el conjunto de los **enteros positivos**. Es útil referirnos al conjunto de los **enteros no negativos**, que denotaremos con $\bar{\mathbb{Z}}$, formado por los enteros positivos y el cero.

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

Noten que $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros es *discreto*, es decir, está acomodado de manera sucesiva, dado un entero p existe su sucesor $p+1$ y su antecesor $p-1$, manteniendo la siguiente relación de orden,

$$p-1<p<p+1,$$

pero **no** está *bien ordenado* pues es posible hallar subconjuntos de $\mathbb{Z}$, no vacíos, que carecen de elemento mínimo.

EJEMPLO 9. Halla un subconjunto de $\mathbb{Z}$ que no tenga elemento mínimo.

SOLUCIÓN. Es fácil ver que el conjunto de los enteros negativos no tiene elemento mínimo. Dado q, un entero negativo, debe ser de la forma $-n$ donde n es un número natural (q es el reflejo de n). Sabemos que $n<n+1$, es decir que, en la recta real, $n+1$ está a la derecha, de n y, por lo tanto, el reflejo de $n+1$ está a la izquierda del reflejo de n. Esto significa que $-(n+1)<q$. Luego dado cualquier entero negativo q tenemos que $q-1$ está a la izquierda de q. ♦

Los enteros, en la recta real, están formados en línea, como los naturales, pero no hay quien comience la fila. Sin embargo podemos contarlos. Para verificarlo debemos exhibir una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{Z}$, el conjunto de los enteros y $\mathbb{N}$, el conjunto de los naturales.

A primera vista parece cosa imposible que exista dicha correspondencia siendo que los enteros incluyen a los naturales y a otro conjunto *tan grande* como los naturales, como son los enteros negativos. Pero ya nos vimos en situaciones parecidas, cuando establecimos una correspondencia biunívoca entre los naturales y los pares. La cuestión es cómo formar a los enteros, independientemente de su posición en la recta real, para contarlos, hagámoslo así:

$$0 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad -2 \quad 3 \quad -3 \quad \cdots \quad n \quad -n \quad \cdots .$$

Noten que estamos formando a los enteros de manera **que podamos contarlos**, **no** significa que estén **en orden** y que de esta formación infiramos que hay un elemento mínimo. Así, señalando al 0 decimos ***uno***, señalando al 1 decimos ***dos***, señalando al -1 decimos ***tres***, y continuamos, dado un número en la fila es natural o es un reflejo. En caso de ser un natural, digamos n, lo señalamos y decimos $\boldsymbol{2n}$, en caso de ser un reflejo, digamos que sea $-n$, el reflejo del natural n, lo señalamos y decimos $\boldsymbol{2n+1}$, y seguimos así contando a los enteros,

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots & n & -n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots . \end{array}$$

Claramente esta asociación de enteros con naturales constituye una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ pues a cada entero corresponde un natural, según acabamos de ver, y a cada natural corresponde un entero: dado un natural $n\neq 1$ es par o impar. Al natural 1 lo asociamos con el entero 0. Si n es par es de la forma $n=2m$, con $m\in\mathbb{N}$, entonces al natural n le corresponde el entero m. Si $n\neq 1$ es impar es de la forma $n=2m+1$, $m\in\mathbb{N}$, entonces

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

al natural impar n le corresponde el entero $-m$. Por lo tanto, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ tienen la misma cardinalidad, es decir, $\mathbb{Z}$ es **numerable** y

$$|\mathbb{Z}| = \aleph_0.$$

Hay dos operaciones definidas en los números enteros, la suma y el producto, que cumplen con las siguientes propiedades:

	Suma	**Producto**
Cerradura	$a,\, b \in \mathbb{Z} \implies a + b \in \mathbb{Z}$	$a,\, b \in \mathbb{Z} \implies ab \in \mathbb{Z}$
Conmutatividad	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Asociatividad	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a(bc) = (ab)c$
Existen Neutros	$a + 0 = 0 + a = a$	$a1 = 1a = a$
Inverso Aditivo	Si $a \in \mathbb{Z}$, $a + (-a) = 0$	
Distributividad	$a(b + c) = ab + ac$	

Si $a \in \mathbb{Z}$, $2a = a + a$, $3a = a + a + a$, son *múltiplos* de a, así como $a^2 = a \cdot a$ y $a^3 = a \cdot a \cdot a$ son *potencias* de a, tenemos, en general, que:

Definición 2.7. *Si n es un entero positivo y a es un entero, na es un* ***múltiplo positivo*** *de a, y a^n es la* ***n-ésima potencia*** *de a. Así,*

$$na = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ veces}},$$

y

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}.$$

En realidad la definición anterior es más bien intuitiva, nos permite *argumentar*, por ejemplo, que $ma + na = (m + n)a$, para $a \in \mathbb{Z}$ y $m,\, n \in N$, se hace visualmente:

$$\begin{aligned} ma + na &= \underbrace{\overbrace{a + \cdots + a}^{m \text{ veces}} + \overbrace{a + \cdots + a}^{n \text{ veces}}}_{m+n \text{ veces}} \\ &= (m + n)a. \end{aligned}$$

De manera análoga se tratan las propiedades de los exponentes:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= \underbrace{\overbrace{a \cdots a}^{m \text{ veces}} \cdot \overbrace{a \cdots a}^{n \text{ veces}}}_{m+n \text{ veces}} \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

En un buen curso de álgebra superior tratarán lo anterior con menos ligereza y definirán, por ejemplo,

Definición 2.8. *Si $a \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos, de manera* ***recursiva***

$$a^1 = a, \qquad a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Con la definición anterior, usando el principio de inducción, podemos demostrar la siguiente

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

Afirmación 2.4. *Si a y b son enteros y m y n son naturales se cumplen las siguientes propiedades de los exponentes:*

1. $a^m a^n = a^{m+n}$,

2. $(a^m)^n = a^{mn}$,

3. $(ab)^m = a^m b^m$.

Demostración. Usemos el principio de inducción. Demostremos la propiedad (1) por inducción en n. En primer lugar verifiquemos que se cumple la fórmula para $n = 1$.

$$\text{Si } n = 1 \text{ entonces } a^m a^n = a^m a^1 = a^m a, \text{ y } a^{m+n} = a^{m+1} \overset{\text{def}}{=} a^m a.$$

Es decir cuando $n = 1$ ambos lados de la fórmula dan el resultado $a^m a$, luego la propiedad (1) se cumple para $n = 1$.

Ahora debemos verificar que, suponiendo que se cumple para $n = k$, se cumple para $n = k+1$. Suponer que se cumple para $n = k$ significa suponer que $a^m a^k = a^{m+k}$. Veamos qué sucede con $n = k+1$,

$$\begin{aligned} a^m a^{k+1} &= a^m(a^k a) \quad \text{pues por definición } a^{k+1} = a^k a, \\ &= (a^m a^k)a \quad \text{porque el producto es asociativo,} \\ &= a^{m+k}a \quad \text{por la hipótesis de inducción para } n = k, \\ &= a^{(m+k)+1} \quad \text{por definición de potencia,} \\ &= a^{m+(k+1)} \quad \text{porque la suma es asociativa.} \end{aligned}$$

Hemos verificado que se cumple la propiedad para $n = k+1$ a partir de suponer su validez para $n = k$. Por lo tanto, hemos demostrado que la propiedad (1) se cumple para cualquier número natural n.

La demostración de las otras propiedades las dejamos como ejercicio. ♦

Como sucede con los números naturales también hay un orden definido en los números enteros.

Definición 2.9. *Si a y b son dos números enteros, decimos que a es* ***menor que*** *b, y lo escribimos $a < b$, si existe algún número natural n tal que $a + n = b$.*

Es decir, el entero a es menor que el entero b si a está a la *izquierda* de b.

Ejemplo 10. Demuestra que $-5 < -3$.

Solución. Al sumar el natural 2 al -5 obtenemos -3,

$$-5 + 2 = 3.$$

Luego el entero -5 está a la izquierda del entero -3. ♦

El orden así definido cumple:

	Orden en $\mathbb{Z}$
Tricotomía	Si a y $b \in \mathbb{Z}$, entonces $a < b$, $a = b$ ó $b < a$.
Transitividad	Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

Hemos ubicado a los números enteros en la recta real.

Actividad

Considera la ecuación $ax + b = c$. Supón que a, b y c son números naturales, es decir a, b, $c \in \mathbb{N}$. Analiza si la ecuación tiene solución. Ahora para a, b, $c \in \mathbb{Z}$ ¿hay solución de la ecuación? En cada caso da ejemplos, y exhibe contraejemplos que apoyen tus afirmaciones.

Hasta ahora hemos asignado puntos en la recta real a los números naturales y a los enteros. Los vemos formados, con sus respectivos sucesores y antecesores, como un conjunto *discreto*. Notemos que dicha asignación no agota los puntos de la recta. Quedan todavía puntos —por ejemplo, los que están entre dos enteros sucesivos— sin que tengan un número asignado. Pero no hemos terminado, continuemos después de resolver algunos

PROBLEMAS 2.2

1. Exhibe un subconjunto infinito de $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros, que contenga positivos y negativos, que esté bien ordenado.
2. Define *recursivamente* el concepto de **múltiplo de un entero**.
3. Basado en la definición del ejercicio anterior, demuestra, por inducción en n, que $ma + na = (m + n)a$.
4. Demuestra, por inducción en n, la propiedad (2) de la afirmación 2.4.
5. Demuestra, por inducción en m, la propiedad (3) de la afirmación 2.4.

3. NÚMEROS RACIONALES

Llamamos *números racionales* a las fracciones de números enteros sin factor común y denominador distinto de cero.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p,\, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ (p, q) = 1 \right\}$$

En donde $(p, q) = 1$ significa que p y q **no** tienen factor común, es decir, que son *primos relativos*, que ninguno es múltiplo del otro.

Así, $\dfrac{2}{3}$ es un número racional. Noten que todos los números enteros son racionales, si $a \in \mathbb{Z}$, $a = \dfrac{a}{1}$. Es decir

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

EJEMPLO 11. ¿Es $\dfrac{10}{6}$ un número racional?

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

Solución. Así como está escrito y según nuestra definición, como $(10, 6) = 2$ —es decir el 10 y el 6 tienen a 2 como *factor común*— entonces $\dfrac{10}{6} \notin \mathbb{Q}$. ♦

Pero veamos más de cerca, si reducimos la fracción $\dfrac{10}{6}$, dividiendo entre 2 el numerador y el denominador, es decir, si reducimos la fracción a su *mínima expresión*, tenemos que $\dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$. Ahora bien $(5, 3) = 1$, es decir, son primos relativos, por lo que $\dfrac{5}{3} \in \mathbb{Q}$. ¿Cómo es esto?

> Sucede que vamos a considerar a los racionales como las fracciones en su mínima expresión.

Sabemos así que al referirnos a la fracción $\dfrac{6}{3}$, para considerarla como número racional, debemos tratar con su mínima expresión $\dfrac{6}{3} = \dfrac{2}{1} = 2$.

Ejemplo 12. ¿Es $\dfrac{-12}{5}$ un número racional?

Solución. En vista de que -12 y 5 son números enteros, $5 \neq 0$ y $(-12, 5) = 1$, la respuesta es **sí**, $\dfrac{-12}{5} \in \mathbb{Q}$. ♦

Bien, tenemos el conjunto de los números racionales, denotado por $\mathbb{Q}$. Veamos ahora cómo representar estos números en la recta real.

Ejemplo 13. Localiza el número racional $\dfrac{5}{3}$ en la recta real.

Solución. Trazamos la recta real, la cual consiste en una recta horizontal, orientada con una flecha hacia el lado derecho, con un punto O como el origen y un segmento arbitrario, pero fijo, como unidad. Vamos a dividir el segmento unidad, es decir el segmento de recta que va del 0 al 1, en 3 partes *congruentes*, o sea, de igual longitud.

Dividir un segmento de recta dado en un número determinado de partes congruentes, constituye un problema de geometría, cuya solución se basa en sus axiomas y en propiedades de triángulos semejantes:

Dividir el segmento OA en 3 partes congruentes.

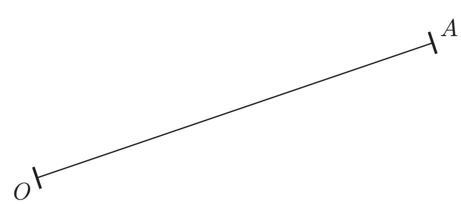

Figura 2.6 El segmento OA.

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

Para ello trazamos un recta *cualquiera* l que pase por O, pero que no contenga al segmento OA.

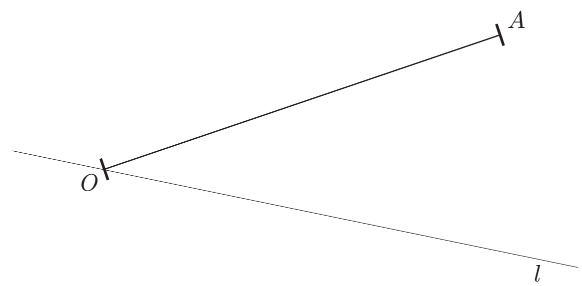

FIGURA 2.7 La recta l pasa por O, pero no contiene a OA.

Con un compás con abertura *cualquiera, pero sin cambiarla*, señálese, a partir de O y sobre la recta l, 3 veces esa longitud, marcando los puntos P, Q y R.

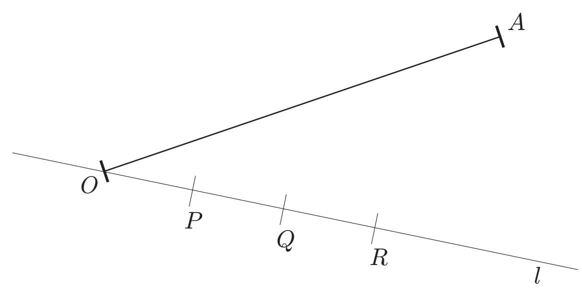

FIGURA 2.8 Tres segmentos de igual longitud sobre l.

A continuación únase los puntos R y A por una recta y trácense paralelas a esta recta por los puntos P y Q obteniendo así los puntos B y C, donde cortan las paralelas al segmento OA.

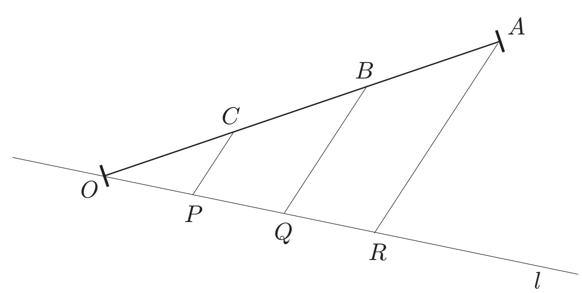

FIGURA 2.9 Unimos R y A, y trazamos paralelas por Q y P.

Los puntos B y C dividen al segmento OA en 3 partes congruentes.

Volvamos al ejemplo, por medio del procedimiento recién ilustrado dividimos el segmento unidad en 3 partes congruentes ubicando, así, el número racional $\frac{1}{3}$.

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

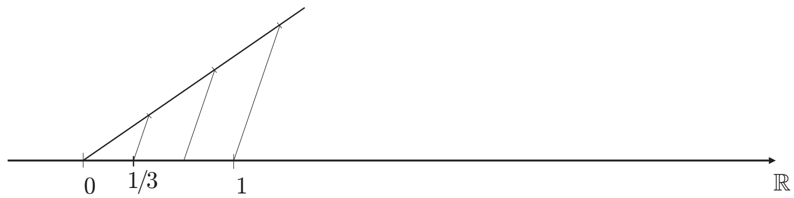

FIGURA 2.10 Dividimos el segmento unidad en 3 partes congruentes y ubicamos $\frac{1}{3}$.

Ahora, usando un compás con abertura de 0 a $\dfrac{1}{3}$, con centro en $\dfrac{1}{3}$ ubicamos en la recta real el punto $\dfrac{2}{3}$, después, con centro en $\dfrac{2}{3}$ ubicamos $\dfrac{3}{3} = 1$; de manera sucesiva, ubicamos $\dfrac{4}{3}$ y finalmente $\dfrac{5}{3}$.

FIGURA 2.11 El segmento de longitud $\frac{1}{3}$ nos permite ubicar $\frac{5}{3}$.

♦

El procedimiento realizado en el ejemplo anterior se puede aplicar para localizar cualquier fracción cuyo numerador y denominador sean enteros positivos, se denotan con $\mathbb{Z}^+$ —si el numerador es igual a 0, la fracción es 0. Vamos entonces a representar en la recta real la parte positiva de los números racionales: las fracciones con denominador distinto de cero, con numerador y denominador positivos y primos relativos,

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p,\, q \in \mathbb{Z}^+,\ q \neq 0,\ (p,q) = 1 \right\}.$$

Sea, pues, $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ un número racional positivo, para ubicarlo en la recta real actuamos de la siguiente manera:

1. Dividimos el segmento unidad en q partes congruentes, el racional $1/q$ estará situado a la derecha del 0, entre el 0 y el 1.
2. A partir de 0 y en la *misma dirección* de $1/q$, trazamos p veces, una a continuación de otra, la longitud del 0 a $1/q$ para ubicar ahí el racional p/q.

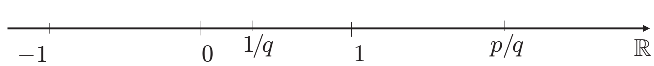

FIGURA 2.12 p veces la longitud $1/q$.

Hemos entonces ubicado cada número racional positivo en la recta real. Los negativos se ubicarán de manera simétrica al otro lado del 0 en la recta real.

Así, hemos asociado a cada número racional un punto en la recta real.

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales están definidas las operaciones de suma y producto, así como una relación de orden.

DEFINICIÓN 2.10. *Si $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ la* ***suma*** *y el* ***producto*** *se definen como*

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs},$$
$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}.$$

Se dice que $\frac{p}{q}$ es ***menor que*** *$\frac{r}{s}$, y se escribe $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, si $ps < qr$.*

Las operaciones así definidas cumplen las propiedades siguientes:

	Suma	**Producto**
Cerradura	$\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \implies \frac{p}{q} + \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$	$\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \implies \frac{p}{q}\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$
Conmutatividad	$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}$	$\frac{p}{q}\frac{r}{s} = \frac{r}{s}\frac{p}{q}$
Asociatividad	$\frac{p}{q} + \left(\frac{r}{s} + \frac{t}{u}\right) = \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) + \frac{t}{u}$	$\frac{p}{q}\left(\frac{r}{s}\frac{t}{u}\right) = \left(\frac{p}{q}\frac{r}{s}\right)\frac{t}{u}$
Neutros	$\frac{p}{q} + 0 = 0 + \frac{p}{q} = \frac{p}{q}$	$\frac{p}{q}1 = 1\frac{p}{q} = \frac{p}{q}$
Inversos	$\frac{p}{q} + \left(-\frac{p}{q}\right) = 0$	$\frac{p}{q} \neq 0 \implies \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = 1$
Distributividad	$\frac{p}{q}\left(\frac{r}{s} + \frac{t}{u}\right) = \frac{p}{q}\frac{r}{s} + \frac{p}{q}\frac{t}{u}$	

El orden cumple con estas propiedades:

	Orden en $\mathbb{Q}$
Tricotomía	Si $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s} \in \mathbb{Z}$, entonces $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ ó $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$.
Transitividad	Si $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ y $\frac{r}{s} < \frac{t}{u}$, entonces $\frac{p}{q} < \frac{t}{u}$.
Densidad	Si $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ entonces existe $\frac{t}{u} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{p}{q} < \frac{t}{u} < \frac{r}{s}$.

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

En un curso de álgebra superior se estudian los números racionales a profundidad. Aquí, sin entrar en más detalle, usaremos las propiedades de las fracciones comunes,

$$\frac{-5}{3} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3} = (-1)\frac{5}{3}.$$

Y, generalizando, si $p,\ q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$,

$$\frac{-p}{q} = \frac{p}{-q} = (-1)\frac{p}{q} = -\frac{p}{q}, \qquad \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p}{q} + \left(-\frac{r}{s}\right), \qquad \left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}, \text{ con } p \neq 0.$$

Donde sí conviene analizar un poco más es lo que sucede con el orden. A diferencia de los naturales y los enteros, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales no es un conjunto *discreto*, en el que cada elemento tenga un sucesor. Precisamente, la propiedad de *densidad* significa que dado un número racional no existe el racional *que le sigue*, sino que:

Afirmación 2.5. *Entre dos números racionales hay siempre otro racional.*

Demostración. Basta demostrar la afirmación para dos racionales positivos. Así, si tenemos dos racionales tales que $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ demostraremos que su *media aritmética* está entre los dos, esto es,

$$\frac{p}{q} < \frac{ps + rq}{2qs} < \frac{r}{s}.$$

Partamos de que

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s},$$

como p, q, r y s son enteros positivos, diferentes de 0, podemos aplicar las propiedades elementales para las desigualdades entre enteros positivos, tenemos entonces que, por la definición de orden,

$$ps < rq.$$

Sumando ps en ambos lados de la desigualdad tenemos

$$2ps < ps + rq,$$

dividiendo ambos lados entre $2qs$,

$$\frac{p}{q} < \frac{ps + rq}{2qs}. \tag{2}$$

Ahora, partiendo de nuevo de

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s},$$

tenemos, como antes, que

$$ps < rq.$$

Sumando rq en ambos lados tenemos

$$ps + rq < 2rq,$$

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

dividiendo ambos lados entre $2qs$,

$$\frac{ps+rq}{2qs} < \frac{r}{s}. \tag{3}$$

Las desigualdades (2) y (3) demuestran que la media aritmética está entre los dos racionales dados.

Hasta aquí hemos demostrado que entre dos racionales *positivos* hay otro racional. Dejamos como ejercicio el resto de la demostración ♦

La afirmación anterior tiene importantes consecuencias:

Afirmación 2.6. *Entre dos números racionales dados hay un número infinito de números racionales.*

Demostración. La demostración completa y formal escapa del ámbito de este libro, pero demos una idea.

Dados dos números racionales, ya demostramos que hay uno entre ellos, bien, consideremos el racional de la izquierda y el que recién hallamos; pues entre esos dos, por la afirmación anterior, hay uno. Consideremos de nuevo el de la extrema izquierda; entre ese y el recién hallado hay otro, y así, y así, podemos repetir el procedimiento *ad infinitum* y, finalmente, entre los dos racionales dados hemos hallado un número infinito de racionales entre ellos. ♦

Es importante comprender el significado de la *densidad* de los racionales. Imaginen dos racionales *cercanos*, digamos $\dfrac{1}{1{,}000{,}000}$ y $\dfrac{2}{1{,}000{,}000}$, prácticamente inindistinguibles si fueran fracciones de milímetro, pues bien, por la afirmación 2.6, entre esos dos hay un número infinito de racionales.

Es decir, los números racionales parecen tan *apretujados* en la recta real que nos haría pensar que la cubren. Cosa que no sucede, pero eso es el tema del siguiente parágrafo.

Actividad

Compitan entre un grupo de personas dando dos números racionales, retando a encontrar un número racional entre ellos, y a esbozar la manera de encontrar un número infinito, hallar 5, ó 10, y explicar cómo se podrían encontrar más.

La *densidad* de $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales, podría inducirnos a pensar que hay *muchos más* racionales que enteros. En los parágrafos anteriores vimos que

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0.$$

Ahora nos preguntamos ¿cuál es cardinalidad de los racionales? ¿quién es $|\mathbb{Q}|$? La sorpresa es que la cardinalidad de los racionales también es $\aleph_0$, lo cual significa

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

que podemos establecer una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$. Dicho en lenguaje coloquial, que hay la misma cantidad de racionales que de naturales.

No es fácil de explicar dicha correspondencia, para ilustrar partamos de la idea de que un conjunto de cardinalidad $\aleph_0$ se puede *formar* para contarlo —como lo hicimos con los enteros—, formarlos pero no ordenarlos de manera consecutiva.

Aun así, para ilustrar la manera en cómo vamos a contar los racionales, lo haremos con los racionales positivos, ya que los negativos tendrán la misma cardinalidad y, como ya percibimos de los enteros positivos y los negativos, la unión de dos conjuntos de cardinalidad $\aleph_0$ tiene, a su vez, cardinalidad $\aleph_0$.

Vamos, entonces, a contar los racionales positivos. Primero los colocamos, pero no en una fila, sino en varias, en una tabla: fila tras fila. Primero colocamos una fila con los racionales con denominador igual a 1, debajo colocamos a los racionales con denominador 2, y así sucesivamente:

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & & \frac{5}{1} & \rightarrow & \frac{6}{1} & & \frac{7}{1} & \rightarrow \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & & \frac{6}{2} & & \frac{7}{2} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & & \frac{6}{3} & & \frac{7}{3} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & & \frac{6}{4} & & \frac{7}{4} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \frac{5}{5} & & \frac{6}{5} & & \frac{7}{5} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{6} & & \frac{2}{6} & & \frac{3}{6} & & \frac{4}{6} & & \frac{5}{6} & & \frac{6}{6} & & \frac{7}{6} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{7} & & \frac{2}{7} & & \frac{3}{7} & & \frac{4}{7} & & \frac{5}{7} & & \frac{6}{7} & & \frac{7}{7} & \cdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Contemos los racionales según la dirección de las flechas, comenzamos con $\frac{1}{1} = 1$, a quien asociamos el natural 1, a continuación asociamos el 2 a $\frac{2}{1} = 2$, después el 3 se asocia a $\frac{1}{2}$, continuando asociamos el natural 4 a $\frac{1}{3}$, y continuamos de esa manera, verificando, antes de asociar un número natural, que la fracción esté formada por primos relativos. Según la dirección de las flechas el 5 correspondería a $\frac{2}{2} = 1$ que ya fue considerada (fue *contada* con el 1), así, el 5 corresponde, en realidad a $\frac{3}{1} = 3$. Seguimos de esta manera y asociamos 6, 7, 8, 9 y 10, respectivamente, a $\frac{4}{1} = 4$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$. Después, según la sucesión de fracciones indicada por las flechas, siguen tres fracciones cuyo numerador y denominador

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

no son primos relativos, a saber $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{3}$ y $\frac{4}{2}$, por lo cual las *saltamos* y asignamos el 11 a $\frac{5}{1} = 5$.

Al seguir el camino marcado por las flechas, cuando hallamos una fracción cuyo numerador y denominador no son primos relativos, se trata de un racional ya contado. Es decir, en la tabla aparecen, además de los racionales, como $\frac{3}{2}$, otras fracciones: las obtenidas al multiplicar numerador y denominador del racional por un número natural, por ejemplo $\frac{3}{2} = \frac{9}{6} = \frac{24}{16} = \frac{6}{4}$. Es por ello que *saltamos* esas fracciones.

Dada cualquier fracción $\dfrac{p}{q}$ ocupa un lugar en la tabla recién mostrada y, según el camino señalado por las flechas, llegará el turno de contarla.

Ilustramos, así, una manera de establecer una correspondencia biunívoca entre los naturales y la parte positiva de $\mathbb{Q}$. Al considerar todos los racionales se mantiene la cardinalidad. Concluimos que $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Veamos otra apariencia de los números racionales. Dado $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (sabemos que $q \neq 0$ y que $(p,q) = 1$) efectuemos la división del numerador p entre el denominador q obteniendo, así, su expresión decimal. Ilustremos.

Ejemplo 14. Halla la expresión decimal de $\dfrac{271}{25}$.

Solución.

$$\frac{271}{25} = 10.84\,.$$

Al dividir numerador entre denominador, obtuvimos un número con 2 cifras decimales, es decir después de obtener en el cociente el último decimal, el 4, obtuvimos el residuo 0. El procedimiento para dividir se detuvo. A este tipo de expresiones le llamamos *decimal que termina*. ♦

Ejemplo 15. Halla la expresión decimal de $\dfrac{1}{3}$.

Solución.

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots\,.$$

Los puntos suspensivos indican que el proceso de la división no se detiene, siempre se obtiene residuo 1, *se baja el cero* y de nuevo tenemos 10 entre 3, que coloca otro 3 en el cociente, obteniendo residuo 1. Para indicar lo anterior se coloca una barra sobre el número que se repite en el cociente, así,

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}\,.$$

A esta expresión le llamamos *decimal periódico*, en este caso el periodo es 3. ♦

Ejemplo 16. Halla la expresión decimal de $\dfrac{482}{13}$.

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{482}{13} &= 37.076923076923076923\ldots,\\ &= 37.\overline{076923}\,.\end{aligned}$$

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

Se trata de un decimal periódico, cuyo periodo es 076923. ♦

Observemos que, dicho de manera estricta, un decimal que termina tiene periodo 0, digamos $9.67857 = 9.67857\overline{0}$, o, simplemente, $4 = 4.\overline{0}$. De todos los decimales periódicos vamos a excluir las 'colas' de 9 debido a que no son más que otra representación de decimales que terminan.

Afirmación 2.7. $1 = 0.\overline{9}$.

Demostración. Sea
$$x = 0.\overline{9},$$
multiplicando por 10 en cada lado,
$$10x = 9.\overline{9}\,.$$
Restando ambas ecuaciones tenemos,
$$\begin{aligned} 10x - x &= 9, \\ 9x &= 9, \\ x &= 1\,. \end{aligned}$$
♦

De manera análoga podemos demostrar que $2.13\overline{9} = 2.14$ y que $0.18\overline{9} = 0.19$.

Así, *la expresión decimal de un racional es un decimal periódico, excluyendo las colas de 9's.*

Problemas 2.3

1. Resuelve las ecuaciones siguientes, para $x \in \mathbb{Q}$:
$$\frac{-5}{3} + x = \frac{5}{-3}, \qquad \frac{-5}{3} + x = 0, \qquad \frac{-5}{3}\,x = \frac{5}{-3}, \qquad \frac{-5}{3}\,x = 1.$$
2. Completa la demostración de la afirmación 2.5.
3. Al contar los racionales ¿qué lugar le corresponde a $\frac{5}{3}$?
4. ¿Qué racional está en el lugar 17?
5. Explica por qué al dividir dos números naturales el procedimiento se detiene o se vuelve periódico.
6. Halla la expansión decimal de $\dfrac{2}{5}$, y de $\dfrac{2}{7}$
7. Halla el racional que corresponde a 3.5, y a $0.\overline{153846}$

---

4. Los números reales

Entre dos racionales siempre hay otro racional, es más, entre dos racionales hay un número infinito de ellos. Sin embargo hay la misma cantidad de racionales que de naturales. La densidad de los racionales nos haría pensar que cubren

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

la recta real, cosa que no sucede. Localicemos en la recta real el número $\sqrt{2}$. Trazamos sobre la recta real el cuadrado con lado igual al segmento unidad. Por el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$. Con centro en 0 y radio igual a la hipotenusa trazamos un arco hasta intersecar la recta real localizando, así, el punto $\sqrt{2}$ sobre la recta.

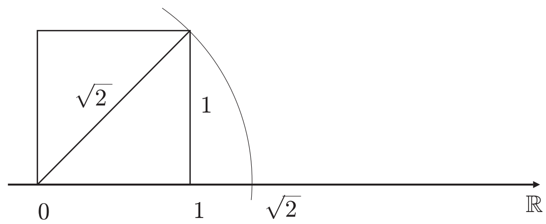

FIGURA 2.13 Ubicación de $\sqrt{2}$ en la recta real.

AFIRMACIÓN 2.8. *El número $\sqrt{2}$ **no es** racional.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional tenemos que demostrar que es imposible expresarlo como cociente de dos enteros, con el denominador distinto de 0 y que sean primos relativos. Es decir, debemos demostrar que es imposible que existan $p,\ q \in \mathbb{Z}$, con $q \neq 0$ y $(p,q) = 1$, tales que $\dfrac{p}{q} = \sqrt{2}$. Bien, vamos a proceder *por contradicción*, es decir vamos a *suponer* que **sí** es posible expresar $\sqrt{2}$ como el cociente de dos primos relativos y partiendo de dicha suposición vamos a caer en una contradicción, lo que nos indicará que la hipótesis de la cual partimos es insostenible, obteniendo, así, la conclusion deseada. Procedamos: supongamos que sí es posible expresar $\sqrt{2}$ como cociente de dos enteros primos relativos, sean, entonces, $p,\ q \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}, \text{ con } (p,q) = 1.$$

Recordemos que $(p,q) = 1$, que p y q sean primos relativos, significa que no tienen factor común. De la hipótesis, multiplicando ambos lados por q obtenemos que

$$p = \sqrt{2}q,$$

Elevando ambos lados al cuadrado tenemos que

$$p^2 = 2q^2. \tag{4}$$

Vemos que p^2 es un número par, pues es múltiplo de 2. Sabemos, por la Afirmación 2.1, que si p^2 es par entonces p es par, es decir, podemos expresar

$$p = 2n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Substituyendo en (4) obtenemos

$$\begin{aligned}(2n)^2 &= 2q^2,\\ 4n^2 &= 2q^2,\\ 2n^2 &= q^2.\end{aligned}$$

© Manuel López Mateos
Prohibida su reproducción
Uso exclusivo para los alumnos del curso de Cálculo I, 2013-1.

Lo cual nos dice que q^2 es par, pues es múltiplo de 2, y, de nuevo por la Afirmación 2.1, q es par,

$$q = 2m \text{ para algún } m \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

De (5) y (6) vemos que, contrario a la hipótesis, p y q tienen a 2 como factor común pues

$$p = 2n,$$
$$q = 2m.$$

Suponer la existencia de primos relativos cuyo cociente fuera $\sqrt{2}$ nos llevó a la contradicción de que esos primos relativos tienen factor común. Por lo tanto, esa hipótesis es insostenible y la conclusión es que no existen enteros primos relativos cuyo cociente sea $\sqrt{2}$. Es decir, $\sqrt{2}$ no es racional. ♦

A los puntos de la recta real que no corresponden a números racionales les llamamos *irracionales*. La unión de los racionales y los irracionales son los números reales, que denotamos con $\mathbb{R}$.

Nos preguntamos: ¿qué apariencia tienen los números reales?, ¿cuántos son?

Así como los números racionales los representamos como decimales periódicos, los irracionales estarán representados por decimales que no son periódicos, *que no terminan*. El conjunto de las expresiones decimales (exceptuando las colas de 9's) conforman el conjunto de los números reales.

Ejemplo 17. Según ya demostramos $\sqrt{2}$ no es racional, por lo tanto, es un decimal que no termina, veamos sus primeros cincuenta dígitos significativos,

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769\ldots.$$

Los puntos suspensivos indican que el decimal continúa. ♦