Capítulo 3
Funciones reales

Función es *dependencia*. A velocidad fija, la distancia recorrida *depende* del tiempo transcurrido. El tiempo que tarda en caer una piedra *depende* de la altura que la soltemos. El área de un triángulo con dos lados iguales *depende* del ángulo formado entre ellos. El valor de la longitud de la circunferencia de un círculo *depende* del valor de su radio. En fin, hay multitud de situaciones en que un valor *depende* de cuál es otro valor. Al valor que *depende* —como la distancia recorrida, el tiempo que tarda la piedra en caer, el área del triángulo, o la longitud de la circunferencia— lo llamamos *variable dependiente*, y al valor del cual depende se le llama *variable independiente*, como sería el tiempo transcurrido del viaje, la altura a que se suelta la piedra, el ángulo entre los dos lados iguales del triángulo, o el valor del radio del círculo.

La situación de dependencia de la longitud de la circunferencia de un círculo respecto al valor de su radio se expresa como $C = 2\pi r$. Es decir, que dado el valor r del radio, al efectuar la operación $2\pi r$, se obtiene el valor C de la longitud de la circunferencia. Se dice que la circunferencia es *función* del radio, o que C es *función* de r, que se escribe $C = C(r)$ y la manera en que se expresa esa dependencia es mediante la regla de correspondencia $C(r) = 2\pi r$, lo cual significa que a cada valor de r se le asocia el valor $C(r)$. Asimismo es posible, mediante una gráfica, ver cómo se comporta C según varía r.

En este capítulo formalizaremos, mediante conjuntos, el concepto general de función expresado de manera intuitiva en los párrafos anteriores. Trataremos, en particular, con funciones cuyas variables independientes y variables dependientes son números reales. Definiremos operaciones entre ellas y veremos la manera de expresarlas gráficamente.

1. Producto cartesiano

Definición 3.1. *La* ***pareja ordenada*** (a, b) *es el conjunto*

$$(a, b) = \big\{a, \{a, b\}\big\}.$$

Vemos claramente que los conjuntos $(a, b) = \big\{a, \{a, b\}\big\}$ y $(b, a) = \big\{b, \{a, b\}\big\}$ son diferentes. En una pareja ordenada cuenta, a diferencia de un conjunto con dos elementos, quién es el primer elemento y quién es el segundo.

Definición 3.2. *Sean A y B dos conjuntos, el* **producto cartesiano** $A \times B$ *es el conjunto de parejas ordenadas (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$, es decir:*

$$A \times B = \{\, (a, b) \mid a \in A \ \text{ y } \ b \in B \,\}.$$

Ejemplo 1. Si $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{r, s\}$, entonces

$$A \times B = \{(1, r), (1, s), (3, r), (3, s), (5, r), (5, s)\}.$$

Las parejas están ordenadas, hay un primer elemento y un segundo elemento; son diferentes las parejas $(1, r)$ y $(r, 1)$, lo cual implica que no es lo mismo, en general, $A \times B$ que $B \times A$. En este caso,

$$B \times A = \{(r, 1), (r, 3), (r, 5), (s, 1), (s, 3), (s, 5)\}. \qquad \blacklozenge$$

Ejemplo 2. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales, al producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se le conoce como $\mathbb{R}^2$, que se lee 'erre dos', y se le llama el *plano cartesiano*,

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\, (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\}. \qquad \blacklozenge$$

Actividad

Considera dos conjuntos, uno de cuatro fechas y otro de seis sucesos; describe el producto cartesiano de esos dos conjuntos. Después considera el subconjunto del producto cartesiano formado por las parejas (fecha, suceso) tales que el suceso haya ocurrido en la fecha.

Más adelante, en este capítulo, representaremos ciertas funciones como subconjuntos del plano.

Problemas 3.1

1. Di qué parejas de conjuntos son iguales:
   i) $\{a, \{a, b\}\}$ y $\{\{b, a\}, a\}$.
   ii) $\{b, \{a, b\}\}$ y $\{\{a, b\}, a\}$.
   iii) $\{a, \{a, b\}\}$ y $\{\{a, b\}, a\}$.
2. ¿Cómo definirías una *terna* ordenada?
3. Sean $A = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n < 5 \,\}$ y B el conjunto de vocales en la palabra 'apache', encuentra el conjunto $A \times B$.
4. ¿Es cierto, en general, que $A \times B = B \times A$? Ilustra con varios ejemplos.
5. Sean $X = \{2, 3, 5, 8\}$ y $Y = \{a, e, f, p\}$.
   i) Halla $X \times Y$ y $Y \times X$.

ii) Exhibe un subconjunto de $X \times Y$ tal que no se repitan los primeros elementos de las parejas, y uno de $Y \times X$ tal que los primeros elementos sean los segundos elementos del anterior.

6. Considera $\mathbb{R}^2$ el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, describe en una figura los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$,

a. $\{ (x, y) \mid x = a \}$, **b.** $\{ (x, y) \mid y > x \}$,
c. $\{ (x, y) \mid y = x^2 \}$, **d.** $\{ (x, y) \mid y = \sqrt{x} \}$,
e. $\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$, **f.** $\{ (x, y) \mid y > 0 \}$,
g. $\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$, **h.** $\{ (x, y) \mid x + y > 1 \}$.

---

2. Definición de función

Definición 3.3. *Una **función** consta de tres objetos: un conjunto llamado el **dominio** de la función, que denotamos con D_f, otro conjunto llamado el **contradominio** de la función y una **regla de correspondencia** que asocia a cada elemento del dominio de la función, uno y sólo un elemento del contradominio. Lo escribimos*

$$f \colon D_f \to C,$$

y la regla de correspondencia que nos indica que al elemento $x \in D_f$ le corresponde el elemento $y \in C$, se escribe $y = f(x)$. Así,

$$\begin{aligned} f \colon D_f &\to C \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

*Al elemento $f(x)$ del contradominio se le llama la **imagen** de x bajo f.*

Ejemplo 3. Sea $A = \{1, 3, 5\}$ el dominio de la función f, $B = \{r, s\}$ el contradominio y la regla de correspondencia la podemos expresar como una tabla que indique el elemento del contradominio que corresponde a cada elemento del dominio:

x	y
1	s
3	s
5	r

Así, vemos que $f(1) = s$, $f(3) = s$ y $f(5) = r$, es decir que s es la imagen del 1 y del 3, y que r es la imagen de 5 bajo f. ♦

Definición 3.4. *Sea $f \colon X \to Y$ una función con dominio X, contradominio Y y regla de correspondencia $y = f(x)$. Al subconjunto de Y de los puntos imagen de todos los puntos $x \in X$ bajo f, se le llama la imagen de la función y se denota con Im_f, así,*

$$\operatorname{Im}_f = \{ y \in Y \mid y = f(x), x \in X \}.$$

A la imagen de la función también se le llama el ***rango****, es el subconjunto de puntos del contradominio que 'barre' f.*

Ejemplo 4. Sea $A = \{1, 3, 5\}$ el dominio de f y $B = \{r, s, t, u, v\}$ el contradominio. La regla de correspondencia está dada por la tabla:

x	y
1	s
3	s
5	r

El subconjunto de B formado por los puntos imagen de f es

$$\mathrm{Im}_f = \{r, s\}.$$

Así, s es un punto imagen, o está en la imagen de la función, mientras que u no es punto imagen, no está en la imagen de la función.

Definición 3.5. *Sea $f\colon X \to Y$ una función con dominio X, contradominio Y y regla de correspondencia $y = f(x)$, y sea A un subconjunto de X. Al subconjunto de Y formado por los puntos imagen de los elementos de A se le llama la* ***imagen*** *de A* ***bajo*** *f y se le denota por $f(A)$ o por $\mathrm{Im}_f A$, es decir,*

$$f(A) = \mathrm{Im}_f A = \{\, y \in Y \mid y = f(x),\ \text{para algún } x \in A \,\}.$$

De hecho, la imagen de la función es $f(X)$.

A $f|A\colon X \to Y$ se le lama la *función f restringida a A* y también se escribe como $f\colon A \to Y$, o de manera más explícita, $f\colon A \subseteq X \to Y$.

Ejemplo 5. Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ el dominio de f, $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$ el contradominio y la regla de correspondencia dada por la tabla

x	$f(x)$
1	c
2	a
3	e
4	e

Sea $A = \{1, 2, 4\}$ un subconjunto de X. Los puntos imagen de los elementos de A son $f(A) = \{c, a, e\}$. Es decir, la imagen de A bajo f es $f(A)$, que también es, en este caso, $f(X)$. ♦

Hay dos funciones particulares. La función **idéntica** y la función **constante**.

Definición 3.6. *Sea una función $f\colon A \to A$, con regla de correspondencia $y = f(x)$. La* ***función idéntica*** *de A, que se denota por I_A, tiene como regla de correspondencia $f(x) = x$, para toda $x \in A$*

$$I_A\colon A \to A, \quad I_A(x) = x, \forall\, x \in A.$$

Ejemplo 6. Sea $A = \{1, 3, 5\}$, la función I_A tiene la regla de correspondencia expresada en la tabla siguiente:

x	y
1	1
3	3
5	5

♦

Definición 3.7. *La $f: A \to B$ es una **función constante** si existe $c \in B$ tal que $f(x) = c$, para toda $x \in A$.*

Ejemplo 7. Sea $A = \{1, 3, 5\}$ el dominio de f y $B = \{r, s, t, u, v\}$ el contradominio. La regla de correspondencia de una función constante está dada por la tabla:

x	y
1	t
3	t
5	t

La función constante expresada le podríamos llamar la función t, es decir la función tal que $f(x) = t$, para toda $x \in A$.

Definición 3.8. *Sea $f: X \to Y$ una función con dominio X, contradominio Y y regla de correspondencia $y = f(x)$. La función f es:*

i) ***Inyectiva*** *si a puntos diferentes en el dominio corresponden, bajo la función, puntos diferentes en el contradominio, es decir,*

$$\text{si} \quad x \neq y \quad \text{entonces} \quad f(x) \neq f(y),$$

o, de manera equivalente, si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$.

ii) ***Suprayectiva*** *si todos los puntos del contradominio son imagen de los elementos del dominio, es decir, que para toda $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, o dicho en términos de la imagen, que $f(X) = Y$.*

iii) ***Biyectiva*** *si es inyectiva **y** suprayectiva. A las funciones biyectivas se les suele llamar **correspondencia biunívoca**.*

Ejemplo 8. Sean $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{s, t, u, v\}$. La función que asocia $1 \mapsto f(1) = t$, $3 \mapsto f(3) = v$ y $5 \mapsto f(5) = s$ es inyectiva pues a puntos distintos les corresponden puntos distintos. ♦

Ejemplo 9. Sean $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{s, t, u\}$. La función que asocia $1 \mapsto g(1) = t$, $3 \mapsto g(3) = u$, $5 \mapsto g(5) = s$ y $7 \mapsto g(7) = t$ es suprayectiva pues cada punto del contradominio es imagen de al menos uno en el dominio. ♦

EJEMPLO 10. Sean $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{s,t,u\}$. La función que asocia $1 \mapsto h(1) = t$, $3 \mapsto h(3) = u$ y $5 \mapsto h(5) = s$ es biyectiva pues es inyectiva (puntos distintos van a puntos distintos) y suprayectiva (todos los puntos del contradominio son imagen), es decir, se trata de una correspondencia biunívoca.

♦

DEFINICIÓN 3.9. *Sea $f\colon X \to Y$ una función con dominio X, contradominio Y y regla de correspondencia $y = f(x)$. La* ***gráfica*** *de f, que se denota por G_f es el subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$ tal que el segundo elemento de cada pareja ordenada es la imagen del primer elemento bajo f, es decir,*

$$G_f = \{\, (x,y) \in X \times Y \mid y = f(x), x \in X \,\}.$$

Así, la gráfica de una función es un conjunto de parejas ordenadas donde el primer elemento de cada pareja es un punto del dominio de la función y el segundo elemento es la imagen del primero bajo la función, es decir, la gráfica de una función es el conjunto de parejas $\big(x, f(x)\big)$, que es, claramente, un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$.

EJEMPLO 11. Si $A = \{1,3,5\}$, la gráfica de la función idéntica de A es $G_{I_A} = \{(1,1),(3,3),(5,5)\}$.

EJEMPLO 12. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. La función idéntica (o identidad) de $\mathbb{R}$ es $I_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $I_{\mathbb{R}}(x) = x$, para toda $x \in \mathbb{R}$. La gráfica de la función identidad es el subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir de $\mathbb{R}^2$ (el plano cartesiano), tal que,

$$G_{I_{\mathbb{R}}} = \{\, (x,x) \mid x \in \mathbb{R} \,\}.$$

Es decir que la gráfica de la función idéntica es el subconjunto del plano cartesiano formado por los puntos (x,y) cuya abscisa y es igual a su ordenada x, se trata de la recta $y = x$ que forma un ángulo de $45°$ con el eje de las x y que pasa por el origen y el primer y tercer cuadrante. ♦

EJEMPLO 13. Si $A = \{1,2,3,4\}$ es el dominio de f, $B = \{a,b,c,d,e,f\}$ el contradominio y la regla de correspondencia está dada por la tabla

x	$f(x)$
1	c
2	a
3	e
4	e

La gráfica de la función es el conjunto de parejas de la forma $\big(x, f(x)\big)$, subconjunto del producto cartesiano $A \times B$,

$$G_f = \{(1,c),(2,a),(3,e),(4,e)\}.$$ ♦

Algunos autores mezclan el concepto de función y el de gráfica de una función y definen a una función con dominio A y contradominio B, como un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ de manera que las parejas tienen la forma $\big(x, f(x)\big)$, donde $x \in A$ y $f(x) \in B$ es la imagen de x bajo f.

Si $f: X \to Y$ es una función inyectiva, es decir, que a puntos diferentes los envía a puntos diferentes, entonces podemos definir una función que tenga como dominio a $f(X)$ y como contradominio a X y su regla de correspondencia sea *regresar* a $y \in f(X)$ a la $x \in X$ de la que provino bajo f. Le llamaremos la *función inversa* de la función f.

Definición 3.10. *Sea $f: X \to Y$ una función inyectiva. La* ***función inversa*** *de la función f, que denotamos con f^{-1}, tiene como dominio la imagen de f, es decir $f(X)$, como contradominio X y como regla de correspondencia $f^{-1}(y) = x$, donde $f(x) = y$, para toda $y \in f(X)$. Así,*

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon f(X) &\to X \\ y \quad &\mapsto x = f^{-1}(y), \quad \text{tal que} \quad y = f(x). \end{aligned}$$

El elemento $x \in X$ es la imagen de y bajo f^{-1} y también se le llama la ***imagen inversa*** *de y bajo f.*

La función inversa de f regresa a cada elemento del contradominio de f al elemento del dominio del cual provino.

Ejemplo 14. Sean $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{r, s, t, u, v\}$ y f la función con regla de correspondencia definida por la tabla siguiente:

x	$f(x)$
1	u
3	s
5	v

La imagen de la función es $f(A) = \{s, u, v\}$, luego es ahí donde está definida la función inversa de f, la tabla de f^{-1} es

y	$f^{-1}(y)$
s	3
u	1
v	5

Es decir,

x	$y = f(x)$
1	u
3	s
5	v

y	$x = f^{-1}(y)$
s	3
u	1
v	5

♦

El propósito de que la función f sea inyectiva es que cada punto imagen en el contradominio lo sea de *sólo un* elemento del dominio y así poder definir a ese punto como la imagen bajo f^{-1}. Insistimos, se puede definir la **función inversa** sólo en donde la función f sea **inyectiva**.

Sin embargo, dada una función cualquiera $f\colon X \to Y$, y un punto $y \in Y$, podemos definir el **conjunto** *imagen inversa* de $y \in Y$.

Definición 3.11. *Sea $f\colon X \to Y$ una función y $y \in Y$ un elemento del contradominio. La* ***imagen inversa*** *de y, que denotamos con $f^{-1}(y)$, es el* ***conjunto*** *de los elementos del dominio de la función f cuya imagen es y,*

$$f^{-1}(y) = \{\, x \in X \mid f(x) = y \,\}.$$

Como se ve claramente, si y es un elemento del contradominio que *no* es imagen bajo f, entonces su imagen inversa será el conjunto vacío. Si la función f no es inyectiva entonces la imagen inversa de algunos puntos será un conjunto con dos o más elementos, y si la función es inyectiva, entonces la imagen inversa de cada punto en el contradominio será vacía o constará de un solo punto (en cuyo caso podemos definir la *función* inversa en la imagen de la función).

Ejemplo 15. Sean $A = \{1, 3, 5, 8\}$ y $B = \{r, s, t, u, v\}$ y f la función con regla de correspondencia definida por la tabla siguiente:

x	$f(x)$
1	u
3	s
5	v
8	s

Digan cuál es la imagen inversa de cada punto de B.

Solución. De la tabla vemos que r no es imagen, es decir, no existe $x \in A$ tal que $f(x) = r$, luego $f^{-1}(r) = \emptyset$. Lo mismo sucede con t, $f^{-1}(t) = \emptyset$. Veamos ahora s, según la tabla s es la imagen de 3 y de 8 bajo f, luego $f^{-1}(s) = \{3, 8\}$. De la tabla obtenemos que $f^{-1}(u) = \{1\}$ y que $f^{-1}(v) = \{5\}$. ♦

De lo anterior obtenemos como criterio que,

> si $f\colon X \to Y$ es una función, la función inversa estará definida sólo en los puntos del contradominio cuya imagen inversa conste de uno y sólo un punto.

Sean dos funciones f y g de manera que la imagen de la primera esté contenida en el dominio de la segunda. Si x está en el dominio de f, y $f(x)$ está en el dominio de g, es posible aplicar g al punto $f(x)$ y obtener $g\big(f(x)\big)$. Esta operación es la aplicación sucesiva de las funciones f y g, se llama la *composición* de las funciones f y g. Noten que primero se aplica f y después se aplica g, por eso al resultado se le nombra f *seguida de* g, y considerando que g se aplica a la imagen de f, se acostumbra escribir $g \circ f$ lo cual se lee f *seguida de* g, de hecho primero escribimos f (y decimos *efe*), después, a la izquierda de la f escribimos la bolita $\circ$ (y decimos *seguida de*) y, finalmente, a la izquierda de la bolita escribimos g (y decimos *ge*). Si $x \in X$ es un punto del dominio de f, aplicamos f y obtenemos $f(x)$ en el dominio de g —el contradominio de f, por hipótesis, está contenido en el dominio de g—, y por ello, a $f(x)$ le podemos aplicar g, obteniendo $g\big(f(x)\big)$. Tenemos como resultado una función cuyo dominio es el dominio de f y cuyo contradominio en el contradominio de g, le llamamos *efe seguida de ge* y denotamos con $g \circ f$, también se lee *ge compuesta con efe* (pero entonces primero se escribe g, después la bolita y después f).

Definición 3.12. *Sean f y g dos funciones tales que la imagen de f está contenida en el dominio de g, $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$. La **composición** de las funciones f y g, que se escribe $g \circ f$ y se lee **efe seguida de ge** o **ge compuesta con efe**, es una función cuyo dominio es el dominio de f, su contradominio es el contradominio de g y su regla de correspondencia es*

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big), \text{para toda } x \in X.$$

Se ilustra con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} x \in X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & f(x) \in Y \arrow[d, "g"] \\ & g\big(f(x)\big) \in Z \end{tikzcd}$$

Figura 3.1 f seguida de g envía $x \in X$ a $g\big(f(x)\big) \in Z$.

Ejemplo 16. Sean $A\{1, 3, 5\}$, $B = \{s, t, u, v\}$ y $C = \{i, j, k, l\}$ y las funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ dadas por las tablas:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = f(x)}$
1	u
3	s
5	v

$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{z = g(y)}$
s	i
t	l
u	j
v	k

Entonces la tabla de $g \circ f$ es,

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{z = g\big(f(x)\big)}$
1	j
3	i
5	k

♦

Actividad

Junta tres grupos de personas y define funciones entre ellos, verifica que lo sean, analiza cuáles son, o no, inyectivas y/o suprayectivas. Realiza la operación de composición y describe la imagen inversa de varios subconjuntos.

La operación de composición de funciones no es, en general, conmutativa, mientras que sí es asociativa.

Afirmación 3.1. *Sean las funciones $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ y $h\colon Z \to W$, entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Demostración. Partiendo de la definición de composición de funciones, tenemos que

$$\begin{aligned}\big((h \circ g) \circ f\big)(x) &= \big(h \circ g\big)\big(f(x)\big)\\ &= h\big(g\big(f(x)\big)\big)\\ &= h\big((g \circ f)(x)\big)\\ &= \big(h \circ (g \circ f)\big)(x).\end{aligned}$$

♦

Problemas 3.2

1. Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{7, 5, 4\}$ dos conjuntos. Di cuál de los conjuntos es la gráfica de una función con dominio A y contradominio B.
   a. $\{(a, 4), (b, 7), (a, 5)\}$, **b.** $\{(b, 2), (a, 7), (c, 4)\}$,
   c. $\{(c, 4), (a, 4), (b, 4)\}$, **d.** $\{(7, c), (4, a), (5, a)\}$,
   e. $\{(b, 7), (c, 7), (a, 4)\}$, **f.** $\{(1, 7), (b, 2), (a, 7)\}$,
   g. $\{(a, 7), (b, 5), (c, 4)\}$, **h.** $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.
2. Si $A = \{2, 5, 7, 8\}$ y $B = \{p, q, r\}$, define una función inyectiva de A a B y otra de B a A, y escribe su gráfica como conjunto de parejas ordenadas. ¿Cuál es la gráfica de la función idéntica de B?
3. Sea f la función que asocia a cada número entero entre -10 y 10 su cuadrado. ¿Cuál es la imagen inversa de 64?
4. Si $f(n) = 2n$, para $n \in \mathbb{N}$ y $g(m) = m^2$ para $m \in \mathbb{N}$, ¿cuál es la regla de correspondencia de $g \circ f$, y de $f \circ g$? describe la gráfica de cada una de las composiciones.
5. Sea f una función biyectiva de A a B, ¿qué función es $f^{-1} \circ f$, y $f \circ f^{-1}$?
6. Sea f una función cualquiera de A en B, $f\colon A \to B$, ¿en dónde está definida la función f^{-1}?, contesta, para esta función, las preguntas del ejercicio anterior.

3. Funciones reales de variable real

Por funciones reales entendemos funciones que toman valores en el conjunto de los números reales, es decir que su contradominio es un subconjunto de los números reales. Que la función sea de variable real significa que su dominio es un subconjunto de los números reales.

Definición 3.13. *Una función* ***real de variable real*** *es una función cuyo dominio es un subconjunto de los números reales y cuyo contradominio también es un subconjunto de los números reales. De manera general nos referiremos a las funciones reales de variable real como funciones de* $\mathbb{R}$ *a* $\mathbb{R}$*. es decir* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, donde a cada* $x\in\mathbb{R}$ *se le asocia, por medio de la regla de correspondencia, el valor* $y=f(x)\in\mathbb{R}$*.*

Ejemplo 17. La función $I_{\mathbb{R}}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es $I_{\mathbb{R}}(x)=x$, para $x\in X$, es una función real de variable real. Su gráfica es,