Capítulo 6

La derivada de una función

1. Cambio y razón de cambio

Cambio es modificación en posición.

> Temprano en la mañana estamos en casa, a mediodía estamos en la escuela. Una posición es estar en casa, otra es estar en la escuela. En el transcurso de la mañana modifiqué posición, cambié de lugar, estaba en casa ahora estoy en la escuela.

La razón de cambio, hablando de movimiento, es la comparación del cambio efectuado en la posición con el tiempo que transcurrió para efectuarlo.

Usamos el término *razón* para comparar dos cantidades, o dos longitudes, con el afán de ver cuántas veces contiene una a la otra, se expresa como cociente de dos números.

> Muy famosa es la razón de la circunferencia al diámetro, las veces que contiene la circunferencia de un círculo a su diámetro
>
> $$\frac{C}{d} = 3.1415926535897932384626434\ldots,$$
>
> comúnmente llamada π. La vemos aquí con 25 cifras de aproximación decimal.

En nuestro caso queremos comparar cambio de posición con tiempo, para ello dividimos la diferencia en posición entre la diferencia en tiempo. Estamos comparando dos diferencias, **posición final menos posición inicial**, el espacio recorrido, y **tiempo final menos tiempo inicial**, el tiempo transcurrido.

> Al dividir el espacio recorrido entre el tiempo transcurrido obtenemos la *razón de cambio* de la posición respecto del tiempo.

Hablando de funciones reales de variable real nos referiremos a la razón de cambio de la función, que será comparar la diferencia de dos valores de la función con la diferencia de los puntos en el dominio de donde provienen esos valores.

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, es decir una función cuyo dominio y contradominio es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, con regla de correspondencia $y = f(x)$. Consideremos dos puntos a y b en su dominio, y su imagen $f(a)$ y $f(b)$ respectivamente.

La razón de cambio de la función en el intervalo (a, b) es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

donde a y b pertenecen al dominio de la función.

Veámoslo en la gráfica de la función,

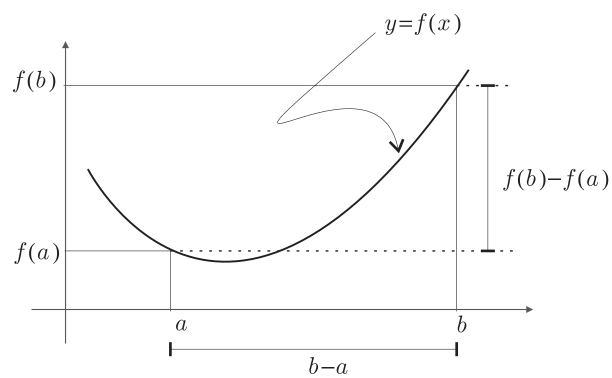

FIGURA 6.1 La razón que compara el cambio en el contradominio con el cambio en el dominio es $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

EJEMPLO 1. Sea $f(x) = x^2 + 1$ la regla de correspondencia de la función f definida en el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales, obtener la razón de cambio de la función $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $(1, 5)$.

SOLUCIÓN. La razón de cambio de una función en el intervalo (a, b) está dada por

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

luego la razón de cambio de $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $(1, 5)$ está dada por el cociente

$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{26 - 2}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$ ♦

En el ejemplo anterior el valor de la función *sube* 24 mientras en el dominio la variable avanza del 1 al 5, lo cual equivale a decir que **en promedio**, en el intervalo $(1,5)$, la función *sube* 6 por cada unidad de *avance*. Al cociente también se le conoce como la razón de cambio *promedio*. En la figura 6.2 vemos que la diferencia de los valores de la función está dada por la diferencia de ordenadas de los puntos $(1,2)$ y $(5,26)$, mientras que la diferencia en el dominio está dada por la diferencia de abscisas.

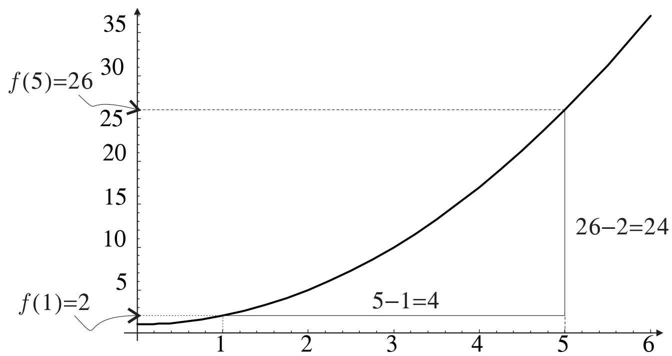

FIGURA 6.2 En la gráfica de $f(x)=x^2+1$ La razón de cambio en el intervalo $(1,5)$ es $\frac{24}{4}=6$.

La razón de cambio de una función en el intervalo que va de un punto del dominio x_0 a un incremento x_0+h, con $h \neq 0$, se llama el *cociente de Newton* de la función en el punto x_0, se expresa como

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

y se puede describir como la razón de cambio de la función f en el punto x_0 respecto del incremento h.

> El cociente de Newton de una función compara el cambio de la función de $f(x_0)$ a $f(x_0+h)$ con el cambio de la variable de x_0 a x_0+h.

EJERCICIOS 6.1

En los ejercicios del 1 al 6, halla la razón de cambio promedio de la función en los intervalos indicados.

1. $f(x)=x^2+1$	$(2,6)$	**2.** $g(x)=2x-x^2$	$(0,2)$
3. $c(t)=-5t^2+45$	$(1,3)$	**4.** $h(x)=\sqrt{x}$	$(9,16)$
5. $f(x)=x^2-x+1$	$(a,a+2)$	**6.** $g(x)=2x^2$	$(a,a+h)$

---

2. Razones y rectas

El cociente de Newton es una buena manera de relacionar rectas con curvas que sean gráfica de alguna función. Geométricamente representa la pendiente de la recta que cruza la gráfica de la función por los puntos de coordenadas $\big(x_0, f(x_0)\big)$ y $\big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big)$.

Así, para describir algebraicamente *una* recta secante a la gráfica de una función f, que pase por el punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$, usamos el cociente de Newton de la función en el punto x_0 para algún incremento $h \neq 0$.

Recordemos de nuestro curso de geometría analítica la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, es decir, hallar la ecuación de una recta dada su pendiente y un punto por el cual pasa.

Supongamos que la recta en cuestión no es vertical, tiene pendiente m y pasa por el punto (x_1, y_1). Sea (x, y) cualquier **otro** punto de la recta. La pendiente m de la recta es precisamente la diferencia de ordenadas dividida entre la diferencia de abscisas, ¡claro, es una razón! muestra cuán empinada está la recta, compara lo que sube contra lo que avanza. Así, se cumple que

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

de donde obtenemos la conocida forma punto-pendiente de la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Ejemplo 2. Halla la ecuación de la recta en el plano cartesiano con pendiente $m = 6$ que pasa por el punto de coordenadas $(1, 2)$.

Solución. En la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta con pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1) substituimos los datos $m = 6$, $x_1 = 1$ y $y_1 = 2$, obtenemos

$$y - 2 = 6(x - 1),$$

despejando y tenemos

$$y = 6x - 4.$$ ♦

Observemos en la figura 6.3 que la recta del ejemplo 2 pasa por el punto $(1, 2)$, tiene pendiente 6 y pasa, también, por el punto $(5, 26)$. Comparemos con el resultado del ejemplo 1, ahí estudiamos la razón promedio de cambio de la función $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $(1, 5)$. El valor de dicha razón de cambio es 6. Ahora vemos que la recta que une los puntos $(1, 2)$ y $(5, 26)$ sobre la curva tiene pendiente 6, lo cual significa que al estudiar la razón promedio de cambio de una función f en el intervalo (a, b) estudiamos asimismo la pendiente de la recta que une a los puntos $\big(a, f(a)\big)$ y $\big(b, f(b)\big)$ sobre la gráfica de la función.

Volviendo al problema de trazar una recta secante a la curva formada por la gráfica de una función f, que pase por el punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$ donde x_0 es un punto del dominio, consideremos el número real $h \neq 0$ de manera que $x_0 + h \in D_f$.

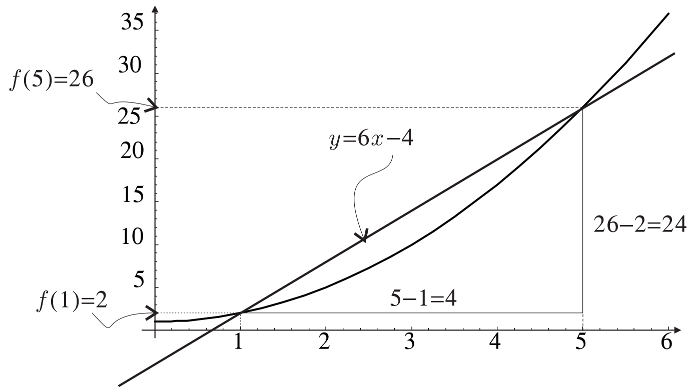

FIGURA 6.3 La recta $y = 6x - 4$ tiene pendiente 6 y pasa por el punto $(1, 2)$. Noten que pasa también por el punto $(5, 26)$.

Una secante a la curva formada por la gráfica de la función f es la recta con pendiente

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{que pase por el punto} \quad \big(x_0, f(x_0)\big).$$

O, de manera equivalente, la recta que pasa por los puntos

$$\big(x_0, f(x_0)\big) \text{ y } \big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big).$$

La ecuación de esta recta tangente es, partiendo de la forma punto-pendiente,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

substituyendo los valores de la pendiente y las coordenadas del punto,

$$y - f(x_0) = \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right)(x - x_0).$$

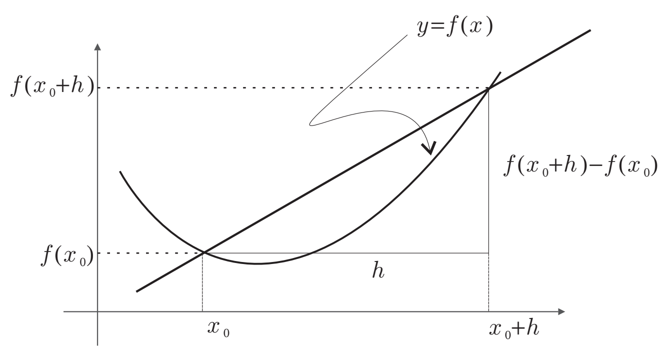

FIGURA 6.4 La recta secante a la gráfica de $f(x)$ que pasa por $\big(x_0, f(x_0)\big)$ y $\big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big)$ tiene pendiente $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Ejemplo 3. Trazar las secantes a la gráfica de la función en el ejemplo 1 que pasen por el punto $(1,2)$, y por los puntos de la gráfica correspondientes a los valores 4, 3 y $2 \in D_f$.

Solución. La función del ejemplo 1 es $f(x) = x^2 + 1$, el punto $(1,2)$ es, en efecto, un punto de la gráfica de $f(x)$ pues $f(1) = 2$, así que tiene sentido la pregunta. Ahora bien, cuando nos piden *trazar* secantes, dada la traducción entre geometría y álgebra construída alrededor de 1630 por Fermat y Descartes, de manera independiente, basta con dar la ecuación de dicha recta secante.

Hemos entonces de trazar rectas del punto $(1,2)$ a los puntos $\big(4, f(4)\big) = (4,17)$, $\big(3, f(3)\big) = (3,10)$ y $\big(2, f(2)\big) = (2,5)$. Para ello obtenemos la razón de cambio de la función $f(x) = x^2 + 1$ en cada uno de los intervalos $(1,4)$, $(1,3)$ y $(1,2)$ subconjuntos del dominio de la función (no confundan a los intervalos que son subconjuntos de $\mathbb{R}$, la recta real, con las parejas ordenadas que representan puntos en el plano cartesiano). La razón de cambio de la función en cada uno de los intervalos —llamémoslas q, r y s— es la pendiente de la recta buscada.

$$q = \frac{17-2}{4-1} = 5, \quad r = \frac{10-2}{3-1} = 4 \text{ y } s = \frac{5-2}{2-1} = 3$$

Así la ecuación de la recta que pasa por $(1,2)$ y $(4,17)$ es

$$y - 2 = 5(x-1) \quad \text{o, simplificando,} \quad y = 5x - 3.$$

De manera análoga, la ecuación de la recta que pasa por $(1,2)$ y $(3,10)$ es

$$y - 2 = 4(x-1) \quad \text{o, simplificando,} \quad y = 4x - 2.$$

Finalmente, la ecuación de la recta que pasa por $(1,2)$ y $(2,5)$ es

$$y - 2 = 3(x-1) \quad \text{o, simplificando,} \quad y = 3x - 1.$$ ♦

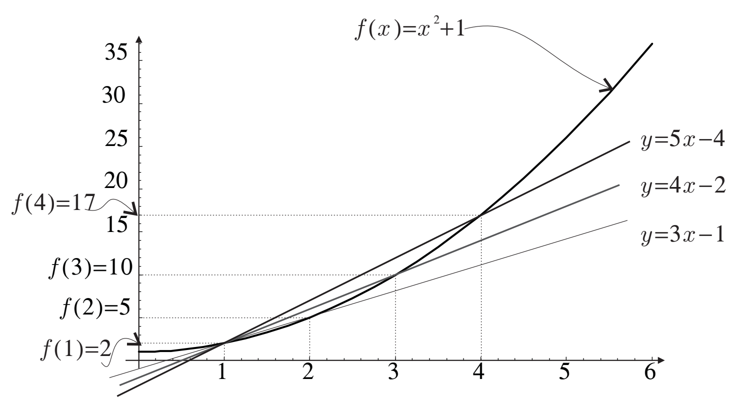

Figura 6.5 Secantes trazadas de $\big(1, f(1)\big)$ a $\big(4, f(4)\big)$, $\big(3, f(3)\big)$ y $\big(2, f(2)\big)$.

Usamos la razón de cambio de una función en un intervalo para obtener la pendiente de la recta que cruza la gráfica de la función en los puntos correspondientes a los valores de los extremos del intervalo.

Observemos cómo, en el ejemplo anterior, esbozamos la manera de lograr uno de los principales objetivos del presente libro, explicar cómo trazar la tangente a una curva en un punto dado . Pueden ver en la figura 6.5 que trazamos varias rectas secantes que pasan por el punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$ en este caso $(1, 2)$, es decir, $x_0 = 1$ y, respectivamente, por otros puntos sobre la curva situados más y más cerca del mismo $(1, 2)$, a saber los puntos $\big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big)$ correspondientes a los valores de $h = 3$, 2 y 1, cuyas pendientes tomaron los valores respectivos de 5, 4 y 3. ¿Qué sucedería si consideramos valores de h cada vez más y más pequeños, por ejemplo $h = \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$? Evidentemente tendríamos, aplicando el mismo procedimiento que en el ejemplo 3, secantes que van de $(1, 2)$ a puntos más y más cercanos. Según mencionamos en el capítulo 0, de continuar obtendríamos la tangente a la curva en $(1, 2)$ como estado límite del procedimiento mencionado. Pero eso es tema de la siguiente sección, mientras tanto resolvamos estos ejercicios.

EJERCICIOS 6.2

En los ejercicios del 1 al 6, trazar secantes que crucen la gráfica de la función mencionada en el punto correspondiente a x_0 y a $x_0 + h$ para los valores de h indicados

1. $f(x) = x^2 + 1$,
$x_0 = 1,\ h = -3,\ -2,\ -1.$

2. $g(x) = 3x - x^2$,
$x_0 = 1,\ h = 1,\ 2,\ 3.$

3. $c(t) = -5t^2 + 45$,
$t_0 = 3,\ h = -3,\ -2,\ -1.$

4. $h(x) = \sqrt{x}$,
$x_0 = 0,\ h = \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16}.$

5. $f(x) = x^3 - x$,
$x_0 = 0,\ h = 1,\ 0.5,\ 0.05.$

6. $g(x) = |x| - 2$,
$x_0 = 0,\ h = -2,\ 2,\ -1.$

---

3. TANGENTE A LA CURVA

Las curvas presentadas en las explicaciones de las dos secciones anteriores fueron expresadas, en el plano cartesiano, como gráficas de funciones. En lugar de hablar de la curva C nos referimos a la gráfica de una función f. Es decir estamos tratando con curvas que son gráficas de funciones, a la manera explicada en el capítulo 3. Durante la exposición supusimos también, de manera implícita, que la curva era continua, es decir que tratamos con gráficas de funciones continuas, al estilo del capítulo 5, ya veremos si ello es necesario. Para dar el siguiente paso emplearemos la herramienta expuesta en el capítulo 4, el concepto de límite.

Tenemos el problema planteado:

> Dada una curva C y un punto P sobre la curva, *definir* la tangente a C que pase por P.

Resolvemos, en esta sección, la siguiente modalidad del problema expuesto en la página anterior:

> Sea $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, el dominio $D_f \subseteq \mathbb{R}$, y x_0 un punto cualquiera en el dominio de f, *definir* la recta tangente a la gráfica de la función, que llamaremos la curva $y = f(x)$, en el punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Insistimos, se trata de una modalidad pues no toda curva se puede expresar como gráfica de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En cursos avanzados de Cálculo estudiarán una clase mucho más amplia de curvas, las parametrizadas, expresadas como funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$, el plano cartesiano, y, en general, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, para ellas la recta tangente se definirá de manera similar, como un proceso límite de *vectores* que unen dos puntos de la curva.

Definición 6.1. *Sea x_0 un punto del dominio de la función $f(x)$, definimos la* ***pendiente*** *de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto correspondiente a x_0 como el límite, si es que existe, de las pendientes de las secantes que pasan por $\big(x_0, f(x_0)\big)$ y por puntos más y más cercanos a él sobre la gráfica de la función, es decir, la pendiente de la recta tangente es*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\,,$$

si existe el límite.

> *La pendiente de la tangente es el límite del cociente de Newton cuando $h \to 0$.*

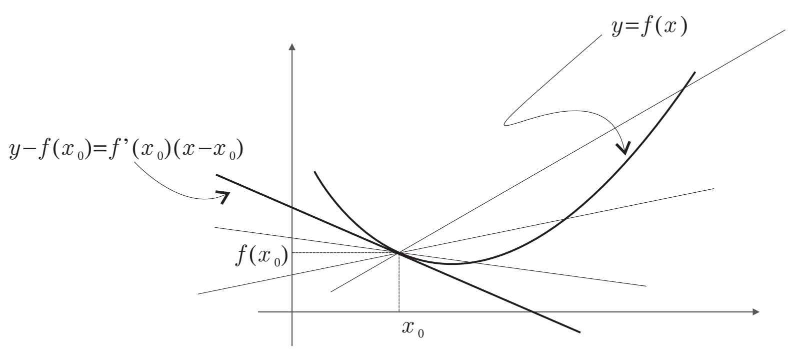

Figura 6.6 La recta tangente tiene pendiente $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

Por comodidad, como ya dijimos, llamamos a la gráfica de la función la *curva* $y = f(x)$. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$ se denota con $f'(x_0)$.

Así,

> la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$ está dada por
> $$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$
> siempre que el límite
> $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
> exista.

EJEMPLO 4. Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2 + 1$ en el punto correspondiente a $x = 1$, da la ecuación de esa recta tangente.

SOLUCIÓN. La curva en $\mathbb{R}^2$, el plano cartesiano, la podemos expresar como gráfica de la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x) = x^2 + 1$. La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $\big(1, f(1)\big)$, que corresponde en la gráfica al punto $x = 1$ en el dominio de la función está dada por el límite del cociente de Newton en ese punto cuando $h \to 0$. La pendiente es
$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h},$$
siempre que el límite exista.

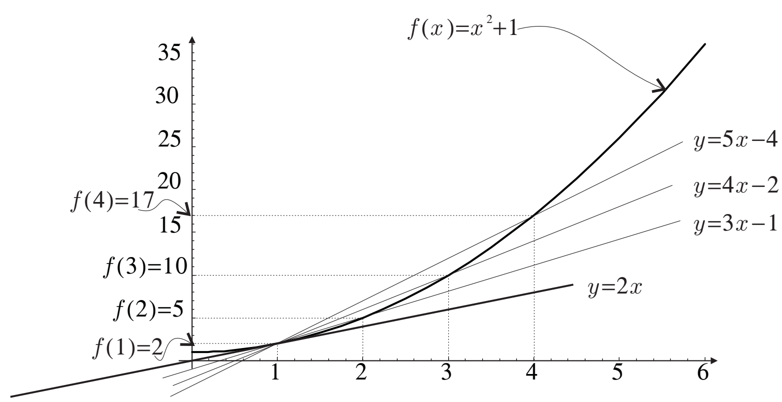

FIGURA 6.7 La recta tangente a la curva $y = x^2 + 1$ en $(1, 2)$ es $y = 2x$.

Procedamos,
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 + 1 - (1^2+1)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h}\end{aligned}$$
para $h \neq 0$, tenemos que lo anterior es igual a

$$\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

Y, por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en $\big(1,f(1)\big)=(1,2)$ es

$$y-2=2(x-1)$$

o, simplificando,

$$y=2x.$$

Lo cual se ilustra en la figura 6.7 en la página anterior. ♦

Simple, ¿verdad?, así sucede, después de hallada una solución da la apariencia de algo que siempre fue del dominio público, sin embargo ya para los antiguos griegos, hace más de 2,300 años, era un reto. Fermat y Descartes, alrededor del año 1650, dieron elementos para esbozar esa definición, Leibniz y Newton la proponen, casi simultáneamente, alrededor de 1680, pero es Cauchy hasta 1821 —140 años después— quien da pleno sentido al concepto de límite y con ello a la definición. Ver, al final del capítulo, la Nota histórica.

Ejemplo 5. Halla la pendiente de la recta tangente a $y=\sqrt{x}$ en $x_0=1$.

Solución. La curva mencionada es gráfica de la función con regla de correspondencia $f(x)=\sqrt{x}$, definida en $\mathbb{R}^+$, el conjunto de los números reales no negativos, es decir mayores o iguales que 0. Sabemos, además, por convención, que la función toma sólo valores no negativos.

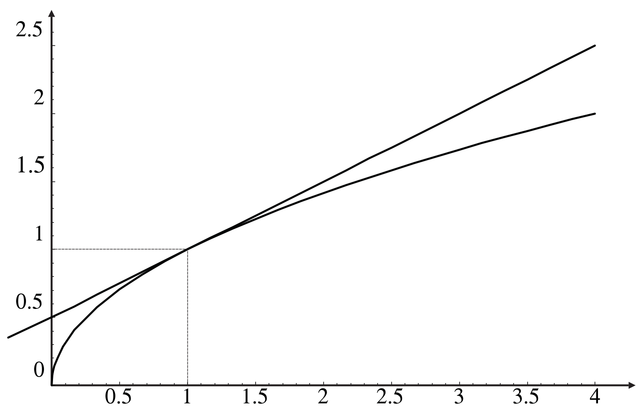

Figura 6.8 La pendiente de la tangente a la curva $y=\sqrt{x}$ en $x_0=1$ es $\frac{1}{2}$.

El cociente de Newton de la función en el punto es

$$\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h}.$$

Vemos que es necesario manipular esta fracción para deshacernos de una expresión indeterminada que aparecería al hacer tender h a 0. Racionalizando,

$$\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h}=\frac{\big(\sqrt{1+h}-\sqrt{1}\big)\big(\sqrt{1+h}+\sqrt{1}\big)}{\big(\sqrt{1+h}+\sqrt{1}\big)h}$$

haciendo operaciones y simplificando, para $h\neq 0$,

$$\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h} = \frac{1}{\sqrt{1+h}+\sqrt{1}},$$

lo cual tiende a $\frac{1}{2}$ cuando $h \to 0$. Así, la pendiente de la recta tangente a $y = \sqrt{x}$ en $x_0 = 1$ es $m = \frac{1}{2}$, según se ilustra en la figura 6.8. ♦

Ejemplo 6. Halla la pendiente de la tangente a la curva $f(x) = x^3 - x^2$ para cualquier punto x_0 en el dominio de la función.

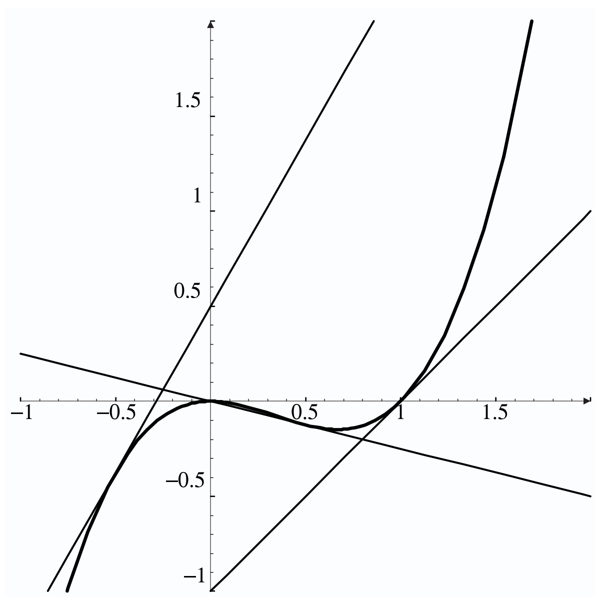

Figura 6.9 La curva $f(x) = x^3 - x^2$ y tangentes en $x_0 = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ y 1.

Solución. La pendiente de la tangente está dada por el límite del cociente de Newton de la función $f(x) = x^3 - x^2$ en el punto x_0 cuando $h \to 0$, es decir

$$\text{Pendiente en } x_0 = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3 - (x_0+h)^2 - ({x_0}^3 - {x_0}^2)}{h},$$

haciendo operaciones, el límite anterior es igual a

$$\lim_{h\to 0} \frac{{x_0}^3 + 3{x_0}^2 h + 3x_0h^2 + h^3 - ({x_0}^2 + 2x_0h + h^2) - {x_0}^3 + {x_0}^2}{h},$$

simplificando,

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3{x_0}^2 h + 3x_0h^2 + h^3 - 2x_0h - h^2}{h},$$

para $h \neq 0$,

$$\begin{aligned}\text{Pendiente en } x_0 &= \lim_{h\to 0}(3{x_0}^2 + 3x_0h + h^2 - 2x_0 - h),\\ &= 3{x_0}^2 - 2x_0.\end{aligned}$$

La pendiente de la tangente en cualquier punto x_0 está dada por la expresión $f'(x_0) = 3{x_0}^2 - 2x_0$. Para hallar la pendiente en un punto particular substituímos ese valor en el lugar de x_0, por ejemplo, para la pendiente de la tangente para los puntos $x_0 = \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ y 1 se substituye cada valor de x_0 en la expresión $f'(x_0) = 3{x_0}^2 - 2x_0$, obteniendo $f'(-\frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$, $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ y $f'(1) = 1$ respectivamente, según se ilustra en la figura 6.9(B).

Es interesante ver el comportamiento de la tangente a la curva $f(x) = x^3 - x^2$ en $x_0 = \frac{1}{2}$. Es tangente en el punto mencionado y cruza la curva en el origen según se puede apreciar en esta ampliación (donde estiramos un poco el eje vertical para apreciar la separación entre la curva y la recta).

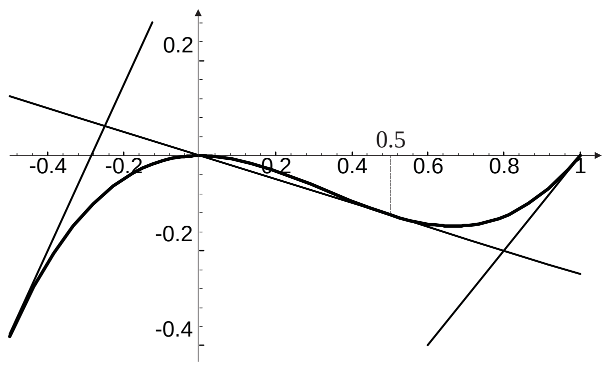

FIGURA 6.9(B) Acercamiento a $f(x) = x^3 - x^2$ y a la tangente en $x_0 = \frac{1}{2}$.

♦

En la sección anterior estudiamos razón de cambio en intervalos, conocida como razón promedio de cambio. Ahora, con el concepto de límite obtenemos la razón de cambio *en un punto*.

> La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto x_0 se conoce como la *razón instantánea de cambio* de la función en x_0. También se le llama la *pendiente de la curva* en ese punto.

EJERCICIOS 6.3

En los ejercicios del 1 al 6, halla la pendiente de la tangente a la curva en el punto indicado y da la ecuación de la recta tangente.

1. $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 1$.

2. $g(x) = 3x - x^2$, $x_0 = 1$.

3. $c(t) = -5t^2 + 45t$, $t_0 = 3$.

4. $h(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$.

5. $f(x) = x^3 - x$, x_0.

6. $g(x) = |x| - 2$, $x_0 = 0$.

---

4. La función derivada de una función

La definición de recta tangente a la gráfica de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ será la base para definir una de las más importantes herramientas del Cálculo, el concepto de **derivada**.

Como vimos en la sección anterior, es posible trazar la tangente a la gráfica de una función $f(x)$ sólo en los puntos x_0 del dominio de la función en donde existe el límite del cociente de Newton cuando $h \to 0$. La *función derivada* de la función $f(x)$ está definida en **esos** puntos donde la gráfica de la función $f(x)$ tiene tangente, la regla de correspondencia de la función derivada asigna a cada punto de su dominio el valor de la pendiente de dicha tangente.

Definición 6.2. *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real con regla de correspondencia $y = f(x)$, la* **función derivada** *de f, que denotamos con f', es una función cuyo dominio $D_{f'} \subseteq \mathbb{R}$ consta de los puntos $x \in D_f$ para los cuales existe el límite del cociente de Newton cuando $h \to 0$. La regla de correspondencia de f' está dada por*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Dada $y = f(x)$ analizamos la expresión

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

los puntos x del dominio de la función $f(x)$ para los que **exista** el límite anterior forman el dominio de la función derivada.

La función derivada f' de la función f asocia a cada punto x de **su** dominio el valor de la **pendiente** de la curva $y = f(x)$

Para simplificar, a la función derivada f' de la función f le llamamos simplemente *la derivada* de f.

La derivada $f'(x)$ de una función $y = f(x)$, también se denota con

$\dfrac{dy}{dx}$ que se lee "dy en dx", la derivada de y respecto a x,

o, de otra manera,

$y' = f'(x)$ que se lee "y prima igual a f prima de x".

Recordemos que a la pendiente de la tangente a la gráfica de la función en un punto determinado le llamamos *razón instantánea de cambio* o *pendiente de la curva* en ese punto.

Podemos concluir que

> la derivada de una función representa el comportamiento de la pendiente de la gráfica de la función.

La derivada en un punto nos dice cuán empinada está la función en ese punto. Al analizar la gráfica de la derivada de una función obtenemos información sobre cómo *va cambiando* la gráfica de la función.

Ejemplo 7. Halla la derivada de $f(x) = x^2 + 1$ y traza la gráfica de la función derivada. Observa la relación entre la gráficas.

Solución. Analicemos para qué valores de x existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2+1)}{h}.$$

Desarrollando y simplificando para $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2+1)}{h} &= \lim_{h \to 0} (2x + h) \\ &= 2x. \end{aligned}$$

La expresión $2x$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por lo que $D_{f'} = \mathbb{R}$ y $f'(x) = 2x$.

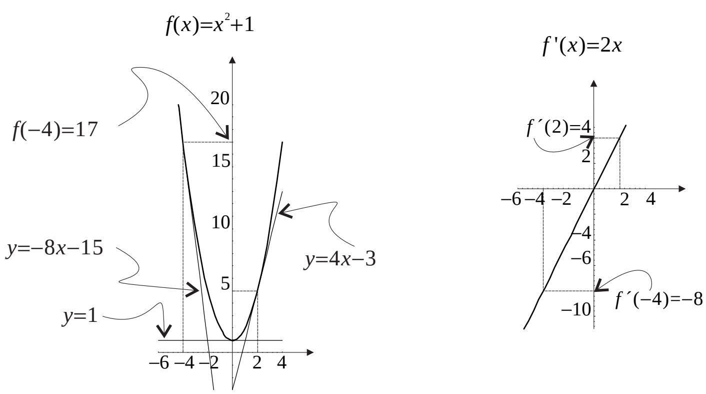

Figura 6.10 Gráfica de $f(x) = x^2+1$ con tangentes en $x_0 = -4$, 0 y 2, y de $f'(x) = 2x$, mostrando los valores de $f'(-4)$, $f'(0)$ y $f'(2)$.

Vemos, en la figura 6.10, que la gráfica de la derivada corta al eje de las x en el origen, el valor de la derivada pasa de tomar valores negativos antes del origen, como en $x = -4$ donde $f'(-4) = -8$, llega a cero en $x_0 = 0$, y toma valores positivos, como en $x = 2$ donde $f'(2) = 4$. En la gráfica de la función apreciamos cómo las tangentes a la curva en los puntos $x_0 = -4$, 0 y 2, que son las rectas $y = -8x - 15$, $y = 1$ y $y = 4x - 3$ respectivamente, cambian su inclinación pasando, en $x_0 = 0$, por la posición horizontal.

Las tangentes pasan de inclinarse a la derecha (antes de 0), a ser horizontal (en $x_0 = 0$), y (después de 0) estar inclinadas hacia la izquierda.

Conforme x se acerca a 0 desde los números negativos, la gráfica de la derivada va creciendo hasta llegar a 0, después toma valores positivos cada vez más grandes. ♦

Es posible obtener información sobre el comportamiento de la función a partir del comportamiento de la derivada de la función. Aunque hablaremos *in extenso* sobre dicho tema en el capítulo 8, veamos el ejemplo a manera de ilustración.

EJEMPLO 8. Halla la derivada de $f(x) = x^3 - x^2$ y traza la gráfica de la función derivada. Estudia las gráficas.

SOLUCIÓN. La función $f(x)$ está definida para todo número real x, luego $D_f = \mathbb{R}$. En el EJEMPLO 6 vimos que el límite del cociente de Newton de la función está definido para todo $x \in \mathbb{R}$, luego $D_{f'} = \mathbb{R}$, y el valor del límite da la regla de correspondencia de la derivada, es decir

$$f'(x) = 3x^2 - x.$$

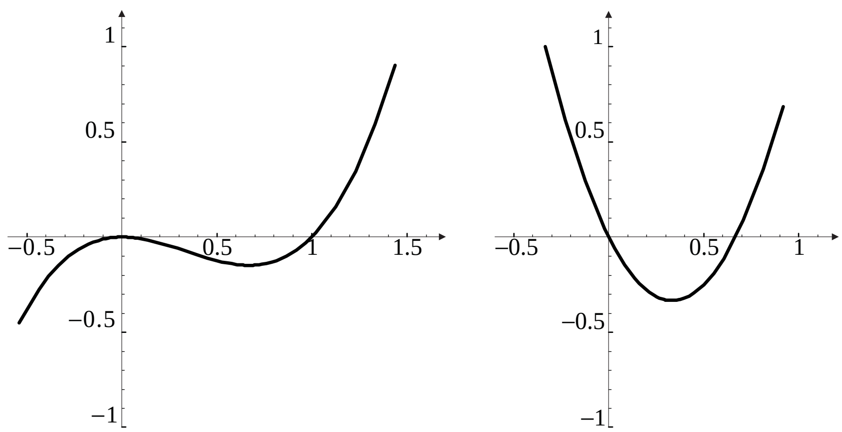

FIGURA 6.11 Gráfica de $f(x) = x^3 - x^2$ y de $f'(x) = 3x^2 - 2x$.

En la gráfica de la derivada (lado derecho de la figura 6.11) vemos que en el intervalo $(-\infty, 0]$ la pendiente es positiva y va disminuyendo hasta 0 conforme x está más y más cerca de 0, lo cual describe el comportamiento de la gráfica del lado izquierdo en donde vemos que conforme nos acercamos a 0 desde los negativos, la curva está cada vez menos *empinada*, hasta tener tangente horizontal —ahí el valor de la derivada es 0. En la gráfica de la derivada vemos que en el intervalo $[0, \frac{2}{3}]$ la pendiente es negativa,

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \text{ y } x = \frac{2}{3},$$

mientras x varía de 0 a $\frac{2}{3}$, la pendiente disminuye hasta que después de $x = \frac{1}{3}$ vuelve a aumentar —manteniéndose en los negativos—, cruza el eje de las x en $x = \frac{2}{3}$ y es positiva en el intervalo $[\frac{2}{3}, \infty)$ tomando valores más y más grandes conforme x está más lejos de $x = \frac{2}{3}$. ♦

Podemos apreciar, de los ejemplos anteriores, que cuando la derivada toma valores negativos la tangente a la gráfica de la función tiene una inclinación como $y = -x$, mientras que si la derivada toma valores positivos la inclinación de la tangente a la gráfica de la función es como $y = x$. En el capítulo 8 usaremos estas propiedades para estudiar la forma de la gráfica de una función a partir del comportamiento de su función derivada.

Resumiendo el contenido de esta sección, el procedimiento para encontrar la función derivada a partir de su definición es:

1. Dada $f(x)$, halla el cociente de Newton $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
2. Ubicar los puntos para los cuales existe $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, el dominio de la función derivada es el conjunto de esos puntos para los que existe dicho límite.
3. La regla de correspondencia de la función derivada es

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

El estudio de la función derivada nos ayuda a comprender la forma de la función original.

EJERCICIOS 6.4

En los ejercicios del 1 al 6, describir el dominio y dar la regla de correspondencia de la función derivada de la función dada. Describir las conclusiones obtenidas al estudiar la gráfica de la función y de su derivada.

1. $f(x) = x^3 + 1$.

2. $g(x) = 3x - x^2$.

3. $c(t) = -5t^2 + 45t$.

4. $h(x) = \sqrt{x}$.

5. $f(x) = x^3 - x$.

6. $g(x) = |x| - 2$.

---

5. Nota histórica

El problema de hallar la tangente a una curva fue estudiado y resuelto para multitud de casos particulares a través de los años. Casi todos los casos resueltos, sobre todo antes de los griegos, durante los griegos o por sus sucesores islámicos, la solución requería de ingeniosas construcciones. Nadie desarrolló un método o algoritmo que permitiera resolver fácilmente el problema en nuevas situaciones.

Euclides en los *Elementos*, la obra matemática más importante de la época de los griegos escrita hace aproximadamente 2,300 años, en la definición 2 del Libro iii, describe lo que hoy entenderíamos como una tangente a un círculo.

> Se dice que una recta **toca un círculo** si al trazarla y llegar al círculo, no lo corta.

Para Euclides una tangente a un círculo es una recta que toca al círculo, sin cruzarlo. Demostró, en la proposición 16 del Libro iii que *la recta perpendicular a un diámetro de un círculo trazada por uno de sus extremos queda fuera del círculo, y entre el espacio que hay entre esa recta y la circunferencia no se puede interponer otra recta.*

Más adelante, en un corolario, muestra que dicha recta *toca* al círculo. La parte de la proposición 16 respecto a que *ninguna recta se puede interponer entre la curva y la recta en cuestión*, pasó a formar parte de la definición de **tangente** antes de la introducción del Cálculo.

Posteriormente Apolonio (250–175 a.c.) en su obra *Cónicas*, en el Libro i, analizó el problema de trazar la tangente a una parábola en un punto dado, pensándola, como Euclides, como recta que toca pero no cruza la curva. Asimismo mostró cómo trazar tangentes a elipses y a hipérbolas.

Cuando a principios del siglo diecisiete surge la geometría analítica, los matemáticos pudieron súbitamente construir multitud de nuevas figuras, enfrentando el problema de hallar nuevas maneras de trazar tangentes. En esa época todavía no se trabajaba con funciones, sino con curvas definidas mediante alguna relación entre dos variables.

En 1615 Kepler en su *Nueva Geometría de Botellas de Vino*, refiriéndose a la variación de volumen con la altura del máximo paralelepípedo inscrito en una esfera decía

> "Cerca del máximo, los decrementos en ambos lados son inicialmente imperceptibles."

Kepler afirmaba que si se varía en una pequeña cantidad la altura del paralelepípedo máximo, la variación en volumen es inicialmente imperceptible, *casi nula* o, empleando el lenguaje de esta sección, la tasa de cambio promedio alrededor del máximo es casi cero, y, en términos de tangentes, *la tangente en el máximo es horizontal*.

Alrededor de 1630 FERMAT mostró que su método de las *adecuaciones* desarrollado para resolver un problema de máximos se podía adaptar para determinar la tangente a una curva.

Simultáneamente DESCARTES trabajaba en el problema de determinar la pendiente de la *normal* a una curva, de donde fácilmente se puede obtener la tangente.

A fines de los 1630's, ROBERVAL (1602–1675) descubrió un método para determinar tangentes considerando que una curva está generada por un punto en movimiento, pero su método depende de la descripción geométrica de la curva.

En una edición de 1650 de la *Geometría* de DESCARTES, en el capítulo *Sobre máximos y mínimos* el holandés HUDDE simplifica los cálculos necesarios en el método de Descartes para hallar normales.

También durante la segunda mitad del siglo diecisiete SLUSE nacido en Liège, desarrolló un método para encontrar la pendiente de tangentes a curvas descritas mediante ecuaciones polinomiales. Aunque no sabemos cómo llegó a su resultado, quizá fue la generalización de multitud de ejemplos, su importancia radica, junto con HUDDE, en que proporcionaron algoritmos generales mediante los cuales se pueden trazar tangentes a curvas representadas por medio de ecuaciones polinomiales.

El problema de trazar la tangente, junto con los conceptos de velocidad y aceleración *instantáneas* originó a la larga el potente y cómodo *Cálculo Infinitesimal* de LEIBNIZ y el *método de las fluxiones* de NEWTON. Hallar la tangente a una curva en un punto y hallar la velocidad de una partícula que describe esa curva cuando alcanza ese punto son problemas matemáticamente idénticos.

Los métodos del cociente diferencial de Leibniz y de la fluxión de Newton fueron descubiertos de manera independiente y casi simultánea. Parece que NEWTON lo descubrió primero pero fue LEIBNIZ el primero en publicarlo en 1684.

En la lección 3 de su *Resumen de las clases impartidas en la Escuela Real Politécnica sobre Cálculo Infinitesimal*, publicado en 1823, CAUCHY define la derivada de una función de la manera que la expusimos en el presente capítulo, y se considera el primero en usar explícitamente la definición moderna de derivada para demostrar teoremas.