Tarea 10

Procesos Estocásticos 1.

1. Parte a) del plan

Realizar los ejercicios 2.35, 2.38, 2.39 y 2.41 de Durrett (Essentials of stochastic processes). Enviar para entrega 2.35, 2.38 y 2.39.

2. Parte b) del plan

Entregar los impares.

1. Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson compuesto. Calcular $\mathbb{C}ov(X_s, X_t)$ para todo $s, t \geq 0$. Sugerencia: Hágalo primero para el proceso Poisson común.

2. Dos tipos de clientes arriban a un supermercado: los que pagan en efectivo y los que pagan con crédito. Los clientes que pagan con crédito llegan de acuerdo a un proceso Poisson $\{N_1(t) : t \geq 0\}$ con media de 6 clientes por minuto y los clientes que pagan con efectivo de acuerdo a un Poisson $\{N_2(t) : t \geq 0\}$ con media de 8 clientes por minuto, ambos procesos independientes.

   a) Calcular la probabilidad de que el primer cliente que llegue a la tienda pague con efectivo.

   b) Calcular la probabilidad de que los primeros 3 clientes paguen con crédito, dado que en los primeros diez minutos ningún cliente llegó.

3. Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson compuesto. PRuebe que la generadora de momentos de la variable X_t está dada por

   $$M_{X_t}(u) = \mathbb{E}(e^{uX_t}) = \exp(\lambda t(M_Y(u) - 1))$$

   donde $M_Y(u)$ es la generadora de momentos de una variable aleatoria Y que tiene la distribución de los saltos del proceso.

4. Sea $\{N_t : t \geq 0\}$ un proceso Poisson de tasa λ. Sea T una variable aleatoria tal que $T \geq 0$, con media μ y varianza σ^2. Calcular $\mathbb{C}ov(T, N_T)$.

5. Definimos al proceso de Cramer-Lundberg (que se planteó originalmente como un modelo para el capital de una cía de seguros):

$$C_t = u + c\,t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \tag{1}$$

donde $u \geq 0$ representa una inversión inicial, $c > 0$ representa una tasa (determinista) de entrada por primas, $\{N_t : t \geq 0\}$ es un proceso Poisson de tasa λ (los tiempos en que ocurre una reclamación de pago -de un asegurado a la cía-), $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una colección de variables aleatorias no negativas (donde Y_i representa el monto de la i-ésima reclamación). El supuesto usual es que el proceso $\{N_t : t \geq 0\}$ y las variables $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ son independientes, y las variables independientes e idénticamente distribuidas.

Decimos que la cía se arruina antes del tiempo s si el proceso C_t baja del valor 0 en algún momento en el intervalo $[0, s]$. En otras palabras, si definimos la variable del tiempo de ruina como

$$\tau := \text{ínf}\{t \geq 0 : C_t < 0\},$$

entonces el evento de ruina antes del tiempo s está dado por $\{\tau \leq s\}$.

a) Dibuje cómo son las trayectorias del proceso $\{C_t : t \geq 0\}$ identificando los tiempos de arribo del proceso $\{N_t : t \geq 0\}$ y las variables $\{Y_i\}$ dentro del dibujo

b) Realice un programa que simule las trayectorias del proceso de Cramer-Lundberg, en el caso en el que las Y_i's tienen distribución exponencial de parámetro μ.

c) Utilizando el inciso anterior, calcule lo siguiente: Suponga que las reclamaciones Y_i siguen una distribución exponencial de parámetro 1, $\lambda = \frac{1}{2}$ y $u = 50$. Cuál es el mínimo valor de tasa de entrada por primas c necesario para que la probabilidad de ruina (que ocurre cuando el proceso baja del valor) en $[0, 100]$ sea menor que o igual que 0,01? *Aqui estamos usando el Método Monte Carlo: simule una cantidad grande n de trayectorias, cuente en cuáles de ellas hubo ruina, que serán contadas como trayectorias favorables y divida entre n, para obtener una estimación de la probabilidad mencionada.*

SUERTE !