Tarea 11
Procesos Estocásticos 1.

Parte a)

1. Investigue si los siguientes procesos $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ son martingalas:

   a) Sean $X_1, X_2, ...$ v.a. independientes con $\mathbb{E}(X_i) = 1$. Sea $Y_n := \prod_{i=1}^n X_i$.

   b) Sean $X_1, X_2, ...$ v.a.i.i.d. donde $\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - q$, con $p \in (0, 1)$. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Sea $Y_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$.

   c) Sea $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{0, 1, ...\}$, con transiciones $p_{00} = 1$ y $p_{ij} = \frac{e^{-i}\, i^j}{j!}$ cuando (i, j) es distinto de $(0, 0)$. (Aquí Y_0 tiene una distribución inicial arbitraria, con $\mathbb{E}(Y_0) < \infty$).

2. Muestra que la suma de martingalas es martingala.

Parte b)

1. Prueba o contraejemplo.

   a) Si un proceso $\{X_n : n \geq 0\}$ es markoviano, entonces es una martingala.

   b) Si un proceso $\{X_n : n \geq 0\}$ es una martingala, entonces es markoviano.

2. Ejemplo 7 en la página 335 de Grimmett.

   a) Desarrolle cuidadosamente todos los pasos.

   b) Reescriba el caso particular en que

   $$S = \mathbb{Z}^d, \quad p_{i,j} = \frac{1}{2d} 1_{\{j\sim i\}},$$

   donde $i \sim j$ denota que i y j son vecinos (i.e. $||i - j||_1 = 1$, donde $||x||_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$). En este caso, a una función ψ que satisface la ecuación (8) le llamamos **armónica** discreta. ¿Porqué se le llama así?

   c) Suponga $d = 1$ y ψ armónica discreta, tal que $\psi(-a) = 0$ y $\psi(b) = 1$, para a y b naturales. Deduzca explícitamente qué forma tiene ψ para valores k enteros tales que $-a \leq k \leq b$.

SUERTE !