Tarea 13
Procesos Estocásticos 1.

Parte a)

1. Simular una caminata aleatoria simple con parámetros p y q (iniciando en $X_0 = k$).

   a) Hacer el programa y graficar la salida.

   b) Usar el programa anterior, en el caso en que $p = q = \frac{1}{2}$, para estimar $\mathbb{E}(\tau)$ y $\mathbb{P}(X_\tau = -50)$, donde
   $$\tau = \text{mín}\{n : X_n = -50, \text{ o } X_n = 80\},$$
   cuando $X_0 = 0$. Esto se hace simulando muchas trayectorias: en el primer caso se promedia la duración de las trayectorias (hasta el tiempo τ), y en el segundo se cuentan las trayectorias favorables al evento entre las totales.

   c) Estimar lo mismo cuando $p = \frac{2}{3}$ y $q = \frac{1}{3}$. Verifique que ocurre la fórmula dada en Rincón para $\mathbb{E}(\tau)$ y $\mathbb{P}(X_\tau = -a)$ en este caso.

2. Tenemos el proceso de la Urna de Poyla: inicialmente tenemos r bolas rojas y a bolas azules con $ra > 0$. En cada tiempo se subtrae una bola al azar y se reemplaza con dos del mismo color. Sea R_n la cantidad de bolas rojas al tiempo n y $P_n = \frac{R_n}{a+b+n}$.

   a) Mostrar que el proceso $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es una martingala.

   b) En el mismo contexto del item anterior, también con $r = a = 1$. Mostrar que $\mathbb{P}(P_n \geq \frac{3}{4} \text{ para algún } n) \leq \frac{2}{3}$.

Parte b)

1. Sean τ y ρ dos tiempos de paro respecto a una filtración. Pruebe o dé un contraejemplo de las siguientes afirmaciones:

   a) La variable $\text{máx}\{\tau, \rho\}$ es un tiempo de paro.

   b) La variable $\text{mín}\{\tau, \rho\}$ es un tiempo de paro

2. Sea $S_0 = 0$ y $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, donde $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ son variables aleatorias independientes con $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Probar que, para $\theta > 0$ fijo, el proceso M definido por
   $$M_n = (sech(\theta))^n \exp\{\theta S_n\} \qquad \forall n \geq 0,$$
   es una martingala (respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n\} = \{\sigma(X_1, ..., X_n)\}$).

3. Estamos en el contexto del ejercicio 2 de la parte a), en el caso en que $r = a = 1$. Sea T el número de bolas extraidas hasta que aparece la primera azul. Mostrar que $\mathbb{E}(1/(T + 2)) = \frac{1}{4}$.

SUERTE !