Tarea 14
Procesos Estocásticos 1.

En toda esta tarea $\{B_t\}_{t\geq 0}$ denota a un M. Browniano estándar.

Parte a)

1. Definamos $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ por $X(t) := 10 + 3\,t + 3\,B(t)$. Calcular:
   a) $\mathbb{E}(X(2))$,
   b) $\mathbb{V}ar(X(3))$,
   c) $\mathbb{P}(X(2) > 20)$,
   d) $\mathbb{P}(X(0{,}5) > 10)$.
2. Sea $\{X_t\}_{t\geq 0}$ definido por $X(t) := 10 + 3\,t + 3B(t)$ donde $\{B(t) : t \geq 0\}$ es un M.B. estándar. Sea $\{S_t\}_{t\geq 0}$ definido por $S(t) := \exp\{X(t)\}$.
   a) Escribir explícitamente la densidad de $S(5)$
   b) Calcular $\mathbb{P}(S(1) > S(0))$.
   c) Calcular $\mathbb{P}(S(1) > S(3), S(1) > 0)$.

Parte b)

1. Probar la equivalencia entre las dos definiciones de M. Brownianos no estándar dada en clase.
2. Probar que los siguientes procesos son M. Brownianos estándar:
   a) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ donde $X_t := -B_t$.
   b) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ donde $X_t := \frac{1}{c}B_{c^2 t}$, con $c > 0$.
   c) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ donde $X_t := B_{t+t_0} - B_{t_0}$, con $t_0 \geq 0$.
3. Probar que en la definición de M. Browniano, las siguientes propiedades son equivalentes:
   a) $\{B_t\}_{t\geq 0}$ tiene incrementos independientes y $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$ para toda $s < t$.
   b) Para toda sucesión de tiempos $0 < t_1 < ... < t_n$ y conjuntos integrables $A_1, ..., A_n \subseteq \mathbb{R}$ ocurre
   $$\mathbb{P}(B_{t_1} \in A_1, \ldots, B_{t_n} \in A_n) = \int_{A_1} \cdots \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1)\, p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \ldots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)\, dx_n \ldots d$$
   donde $p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi t}}\, e^{\frac{(y-x)^2}{2t}}$.
4. Calcular $\mathbb{C}ov(B_s, B_t)$, para $s, t \geq 0$.

SUERTE !