Tarea 5

Procesos Estocásticos 1.

Entregar los pares.

1. Encontrar todas las distribuciones estacionarias de la C.M. con matriz de transición:

   *a*)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   *b*)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

2. Sea $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la caminata aleatoria en $\mathbb{Z}$, $S_0 = 0$. Para que valores de $p \in [0,1]$ ocurre que 0 es un estado recurrente?

   *a*) Mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $p_{00}(2n+1) = 0$ y que
$$p_{00}(2n) = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

   *b*) Utilizar la aproximación de la fórmula de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi\, n}(\frac{n}{e})^n$ y acotar la cola de la suma, $\sum_{n=N}^{\infty} p_{00}(2n)$, adecuadamente en cada caso.

3. Calcular rigurosamente la distribución estacionaria para la cadena de Ehrenfest.

4. Considere una cadena de nacimiento y muerte (espacio de estados $\{0,1,2,...\}$), donde $p(x,x+1) = p_x$, $p(x,x-1) = q_x$ donde $p_x, q_x \geq 0$, y $p_x + q_x = 1$ para $x \geq 0$. Además ocurre que $q_0 = 0$ y $q_x > 0$, para $x > 0$. Para $x > 0$ defina
$$\mu(x) := \prod_{i=1}^{x} \frac{p_{i-1}}{q_i}$$
   y $\mu(0) = 1$.

   *a*) Pruebe que $\mu$ es una medida invariante para la cadena de Markov.

   *b*) Dé condiciones sobre las sucesiones $\{p_x\}_{x\geq 0}$ y $\{q_x\}_{x\geq 0}$ para saber cuándo $\mu$ puede normalizarse para obtener una distribución invariante.

   *c*) Suponga que $p_x \equiv p$ y $q_x \equiv q$, para algún par de números $p, q \in [0,1]$. Traduzca la condición del inciso anterior a este caso particular e interprete qué quiere decir que exista o no tal distribución invariante en este caso particular.

SUERTE !