Tarea 6

Procesos Estocásticos 1.

Entregar los impares.

1. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una C.M. con transiciones dadas por

$$p_{01} = 1, \quad p_{i,i+1} + p_{i,i-1} = 1 \quad p_{i,i+1} = \left(\frac{i+1}{i}\right)^2 p_{i,i-1}, \quad i \geq 1.$$

   Mostrar que si $X_0 = 0$ entonces la probabilidad de que $X_n \geq 1$ para todo $n \geq 1$ es $\frac{6}{\pi^2}$.

2. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una C.M. con matriz de transición:

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

   donde $\alpha, \beta \in [0,1]$. Para qué valores de α y β tenemos una única distribución estacionaria (y cuál es), para qué valores tenemos una infinidad de distribuciones (y mostrarlas) y para qué valores no tenemos distribución estacionaria?

3. Dar un ejemplo de una cadena de Markov con estados nulo-recurrentes. Sugerencia: examine la caminata aleatoria en $\mathbb{Z}$.

4. Decimos que un subconjunto de estados $\mathcal{C}$ es cerrado cuando $i \in \mathcal{C}$, $i \to j$, implican que $j \in \mathcal{C}$. Prueba o contraejemplo:

   a) Toda C.M. tiene al menos una clase (de comunicación) cerrada.

   b) Toda C.M. con espacio de estados finito tiene al menos una clase cerrada.

   c) Toda clase cerrada es recurrente.

   d) Toda clase recurrente es cerrada.

5. En este ejercicio usaremos `R`. Dada una matriz de transición P, y un vector π con espacio de estados en $\{1, ..., N\}$. Usando la naturaleza recurrente de la Cadena de Markov, haga un programa que genere los primeros $X_0, X_1, ..., X_m$ estados visitados por la cadena de Markov. (Hint: Use adecuadamente el programa que hizo en la tarea anterior en la recurrencia.) Imprima el código, y una gráfica con una simulación de trayectoria para la cadena de Ehrenfest.

SUERTE !