Tarea 8

Procesos Estocásticos 1.

Entregar los impares.

1. Sea $\lambda > 0$. Definamos una sucesión de variables $\{N^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: Tiramos $[\lambda n]$ puntos de forma uniforme e independiente en el intervalo $[0,n]$ y definimos a N^n como el número de puntos en $[0,1]$. Probar que N^n, conforme n crece a infinito, converge débilmente a una v.a. y encontrar su distribución.

2. Sea $\{N(t) : t \geq 0\}$ un proceso Poisson de parámetro 2. Calcular

   a) $\mathbb{E}(N_{(0,2)})$, $\mathbb{E}(N_{(2,5)})$.

   b) $\mathbb{P}(N_{(4,7)} > 2 | N_{(2,4)} \geq 1)$.

   c) $\mathbb{P}(N_{(0,1)} = 2 | N_{(0,3)} = 6)$.

   d) $\mathbb{P}(N_{(0,t)}$ sea un numero non).

   e) $\mathbb{E}(N_{(0,t)}\, N_{(0,t+s)})$.

3. Sea $\{N_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson. Calcular $\mathbb{C}ov(N_s, N_t)$ para todo $s, t \geq 0$.

4. Demostrar que las siguientes definiciones de proceso Poisson de parámetro λ son equivalentes.

   a) Sean $S_1, S_2, ...$ v.a. independientes con distribución común exponencial(λ). Definimos al proceso $\{N(t) : t \geq 0\}$ por

   $$N(t) := \sup\{n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} S_i \leq t\}$$

   donde aquí el supremo del conjunto vacío es igual a 0.

   b) Sea $\{M(t) : t \geq 0\}$ un proceso tal que

      1) $M(0) = 0$.

      2) Tiene incrementos independientes.

      3) $M_{t+s} - M_s \sim Poisson(\lambda\, t)$ para cualquier $s \geq 0, t > 0$.

5. Hacer en `R` un programa tal que simule y grafique la trayectoria de conteo de un proceso Poisson $\{N(t) : t \geq 0\}$ de parámetro λ utilizando los tiempos interarribo $S_1, S_2, ...$

SUERTE !