

Simulación Estocástica Tarea 12

Implementar en R.

1. Usando el programa de las notas para generar números de una normal bivariada estándar (X, Y) con coeficiente de correlación $\rho = -0,85$, estime $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 > 1,5)$.
2. Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ una muestra de una distribución Poisson con un punto de cambio aleatorio, es decir, supongamos que el punto de cambio se presenta en $m \in \{1, \dots, n\}$ entonces, condicional al valor de m tenemos que

$$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda) \quad \forall 1 \leq i \leq m,$$

y

$$X_i \sim \text{Poisson}(\tau) \quad \forall m < i \leq n.$$

Por otro lado, supongamos que λ, τ y m tienen distribuciones a priori independientes con $\lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, $\tau \sim \Gamma(\sigma, \delta)$ y $m \sim \text{Unif}\{1, \dots, n\}$, donde $\alpha, \beta, \sigma, \delta$ son constantes conocidas.

- a) Use (sin probar) que la distribución conjunta a posteriori correspondiente es

$$f(\lambda, \tau, m|X) \propto \lambda^{\alpha+y_m-1} \tau^{\sigma+z_m-1} \exp\{-(\beta+m)\lambda\} \exp\{-(\delta+n-m)\tau\}$$

con $y_m = \sum_{i=1}^m X_i$ y $z_m = \sum_{i=m+1}^n X_i$ y que las distribuciones condicionales a posteriori están dadas por:

$$\lambda|\tau, m, X \sim \text{Gamma}(\alpha + y_m, \beta + m),$$

$$\tau|\lambda, m, X \sim \text{Gamma}(\sigma + z_m, \delta + n - m)$$

y

$$f(m|\lambda, \tau, X) = \frac{\lambda^{\alpha+y_m-1} \tau^{\sigma+z_m-1} \exp\{-(\beta+m)\lambda\} \exp\{-(\delta+n-m)\tau\}}{\sum_{i=1}^n \lambda^{\alpha+y_i-1} \tau^{\sigma+z_i-1} \exp\{-(\beta+i)\lambda\} \exp\{-(\delta+n-i)\tau\}},$$

para toda $m \in \{1, \dots, n\}$.

- b) Use el inciso anterior para programar un muestreo de Gibbs que simule a la distribución conjunta a posteriori $f(\lambda, \tau, m|X)$ suponiendo que la muestra de datos está dada por

$$X = \{7, 3, 6, 5, 3, 2, 0, 6, 4, 5, 2, 2, 4, 4, 3, 4, 3, 3, 5, 0\},$$

y $\alpha = 4$, $\beta = \frac{3}{2}$, $\sigma = 2$, $\delta = 1$.

- c) Estimar lo más preciso que pueda los parámetros λ , τ y m dados los datos X , utilizando muestras generadas por el programa anterior.