Chapter 1

Raíces

En este capítulo, varías técnicas serán desarrolladas para encontrar soluciones aproximadas al problema matemático general

$$\textit{dada una función } f \textit{ encontrar un valor para } x \textit{ tal que } f(x) = 0.$$

A esa x se le conoce como un *cero* de la función f o una *raíz* de la ecuación $f(x) = 0$. Este problema es por consiguiente conocido como el *problema de encontrar raíces*.

1.1 Método de la Bisección

Las técnica para encontar raíces generalmente están divididas en dos categorias: simple enclosure methods y esquemas de iteración de punto fijo. Todos los simple enclosure methods están basados en el Teorema del Valor Intermedio. Estos métodos escencialmente trabajan encontrando un intervalo el cual contiene una raíz y entonces sistematicamente se disminuye el tamaño del intervalo. En esta sección, será desarrollado y análizado el desempeño del más básico simple enclosure method, el cual es conocido como el método de la bisección.

1.1.1 Teorema del Valor Intermedio

Antes de empezar el desarrollo del método de la bisección, se repazará el Teorema del Valor Intermedio. Este teorema aparece en cualquier libro de calculo, para una demostración de éste, consultar un libro de texto de calculo avanzado o análisis real.

Teorema 1 *Sea f una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y sea $k \in \mathbb{R}$ tal que se encuentra entre los valores $f(a)$ y $f(b)$. Entonces, existe $c \in \mathbb{R}$ con $a < c < b$ tal que $f(c) = k$.*

Y ¿qué tiene que ver esto con el problema de encontrar raíces? Basicamente, el Teorema del Valor Intermedio proporciona un método para identificar intervalos que contienen los ceros de funciones continuas. Todo esto es necesario para encontrar un intervalo tal que los valores de la función en los extremos de este intervalo sean de signo opuesto. Siempre que el valor de un punto final sea positivo y el otro negativo, raíces se encuentran entre estos valores y al menos una raíz de la función es garantizada a existir en el intervalo.

1.1.2 Método de la Bisección

Supóngase que se ha utilizado el Teorema del Valor Intermedio para localizar un intervalo que contiene un cero de una funciñon continua. ¿Cuál es el siguiente paso? el objetivo será disminuir el tamaño del intervalo. Posiblemente la forma más simple y natural de llevar a cabo una reducción en el tamaño de un intervalo es cortando el intervalo a la mitad. Una vez hecho esto, se determina cual mitad contiene una raíz, esto en base a la utilización del Teorema del Valor Intermedio y entonces se repite el proceso en esa mitad. Esta técnica es conocida como el *método de la bisección*.

De esta descripción básica del método de la bisección, debe ser claro que el método genera una sucesión de intervalos que encierran una raíz. Por conveniencia de notación, sea (a_n, b_n) el intercalo que encierra un raíz en la n-ésima iteración del método. Además, sea $p_n$el punto intermedio del intervalo $[a_n, b_n]$; es decir,

$$p_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Se usará a p_n no sólo como uno de los punto finales para el siguiente intervalo, sino también como una aproximación a la localización de la raíz exacta p. Si p_n es una aproximación certera la iteración es terminada; en otro caso, el Teorema del Valor Intermedio es utilizado para determinar cual de los dos subintervalos (a_n, p_n) o (p_n, b_n) contiene la raíz y hacerse (a_{n+1}, b_{n+1}). El proceso entero es entonces repetido en este subintervalo.

1.1.3 Convergencia

¿Bajo qué condiciones la sucesión de aproximaciones generada por el método de la bisección convergerá a una raíz de $f(x) = 0$? ¿Cuando la sucesión converge, cuál es la velocidad de convergencia? Mucha de la información necesaria para contestar estas preguntas esta contenida en el siguiente teorema.

Teorema 2 *Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$. El método de la bisección genera una sucesión de aproximaciones $\{p_n\}$ la cual converge a una raíz $p \in (a, b)$ con la propiedad*

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}.$$

Observaciones

1. Prestando atención a la conclusión de este teorema, este expone que el método de la bisección converge a *una* raíz de f, no *a la* raíz de f. La condición $f(a)f(b) < 0$ implica signos diferentes en los puntos finales del intervalo, lo cual garantiza la existencia de una raíz, pero no la unicidad. Puede haber más de una raíz en el intervalo y no hay yna forma de saber *a priori* a cual raíz la sucesión convergerá, pero esta convergerá a una de ellas.

2. Ya que $|p_n - p|$ es el error absoluto en la aproximación p_n, la expresión en el lado derecho de la desigualdad referida en el teorema es conocida como una cota teórica del error.

3. El requisito que un intervalo $[a, b]$ sea encontrado tal que $f(a)f(b) < 0$ implica que el método de la bisección no puede ser usado para localizar raíces de multiplicidad par.

Demostración

Ya que la cantidad $b - a$ es constante y $2^{-n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, estableciendo la cota del error será sufieciente mostrar la convergencia de la sucesión del método de la bisección. Por construcción del algoritmo de la bisección y utilizando la notación introducida previamente, para cada n, $p \in (a_n, b_n)$ y p_n es tomado como el punto medio de (a_n, b_n). Esto implica que p_n puede diferir de p por no más que la mitad de la longitud de (a_n, b_n), es decir,

$$|p_n - p| \leq \frac{b_n - a_n}{2}.$$

Sin embargo, por construcción

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{4}(b_{n-2} - a_{n-2}) = \cdots = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1).$$

Recordando que $b_1 = b$ y $a_1 = a$ y combinando las últimas dos ecuaciones se obtiene la cota del error

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

□

Así, la sucesión de aproximaciones generada por el método de la bisección siempre esta grantizado a converger a una raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Ahora, ¿qué tan rápido la sucesión convergerá? De la cota del error teórico, se tiene

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Así, si se toma $\lambda = b - a$ y $\beta_n = 2^{-n}$ en la definición de la tasa de convergencia, se observa que la sucesión generada por el método de la bisección tiene tasa de convergencia $O(1/2^n)$.

1.1.4 Ejemplo

Sea $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ una función continua con una raíz en el intervalo $(1, 2)$. Utilizar el método de la bisección para encontrar esta raíz.

Solución:

Para la primera iteración, se tiene que $(a_1, b_1) = (1, 2)$ y se sabe que $f(a_1) < 0$ y que $f(b_1) > 0$. El punto medio de este primer interval y la primera aproximación a la raíz exacta es

$$p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5.$$

Para determinar si la raíz esta contenida en $(a_1, p_1) = (1, 1.5)$ o en $(p_1, b_1) = (1.5, 2)$, se calcula

$$f(p_1) = 2.375 > 0.$$

Ya que $f(a_1)$ y $f(p_1)$ son de signo opuesto, el Teorema del Valor Intermedio garantiza que la raíz se encuentra entre a_1 y p_1. Para la siguiente iteración, se tiene que $(a_2, b_2) = (a_1, p_1) = (1, 1.5)$.

El punto medio de este nuevo intervalo y la segunda aproximación a la ubicación de la raíz es

$$p_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1+1.5}{2} = 1.25.$$

Se observa que

$$f(p_2) \approx 0.328 > 0,$$

el cual también es de signo opuesto de $f(a_2)$. Así, el Teorema del Valor Intermedio garantiza que la raíz se encuentra entre a_2 y p_2. Para la siguiente iteración, se tiene que $(a_3, b_3) = (a_2, p_2) = (1, 1.25)$.

En la tercera iteración, se calcula

$$p_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{1+1.25}{2} = 1.125$$

y

$$f(p_3) \approx -0.420 < 0.$$

Así, se observa que $f(a_3)$ y $f(p_3)$ son del mismo signo, lo cual implica que la raíz debe estar entre p_3 y b_3. Para la cuarta iteración, se tiene que $(a_4, b_4) = (p_3, b_3) = (1.125, 1.25)$ y

$$p_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{1.125 + 1.25}{2} = 1.1875.$$

Así, el valor de $p = 1.1986912435$ y el error absoluto en p_4 es 1.119×10^{-2}.

1.1.5 Ejercicios

1. Una pareje plane abrir una cuenta en el banco, en la cual ellos ahorrarán dinero para la compra de una casa. Ellos cuentan con uncapital inicial de $\$135,000$. Después de examinar su presupuesto, ellos sienten que pueden cómodamente depositar una cantidad extra mensualmente de $\$2,500$. ¿Cuál es la tasa de interés mínima, compuesta mensualmente, que la pareja debe ganar en su inversión para obtener una cantidad de $\$250,00$ en tres años?

2. Verifica que cada una de las siguientes ecuaciones tiene una raíz en el intervalo $(0,1)$. Después utiliza el método de la bisección para determinar p_3 y determina (a_4, b_4).

   a) $ln(1+x) - \cos x = 0$,

   b) $x^5 + 2x - 1 = 0$,

   c) $e^{-x} - x = 0$ y

   d) $\cos x - x = 0$.

   En los ejercicioc 3-6, verifica que la función dada tiene un cero en el intervalo indicado. Después, realiza las primeras cinco iteraciones del método de la bisección y verifica que cada aproximación satisface la cota del error teórico del método de la bisección. La raíz exacta es indicada por el valor p.

3. Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$, $(1,2)$, $p = \sqrt{3}$.

4. Sea $f(x) = \sin x$, $(3,4)$, $p = \pi$.

5. Sea $f(x) = 1 - ln(x)$, $(2,3)$, $p = e$.

6. Sea $f(x) = x^6 - 3$, $(1,2)$, $p = \sqrt[6]{3}$.

1.2 Método de Newton

El método de Newton es probablemente el más conocido método de punto fijo para aproximar raíces de una función arbitraria.

1.2.1 Método de Newton

La idea básica detrás del método de Newton es completamente directo. Sea p_n la aproximación más reciente a un cero p, de la función f. Sutituyendo a f por su línea tangente en el punto $x = p_n$ y tomando la intersección de la tangente con el eje x como la siguiente aproximación, p_{n+1}, a la raíz. Ya que la línea tangente en el punto $x = p_n$ esta dada por

$$y - f(p_n) = f'(p_n)(x - p_n),$$

la expresión explícita para p_{n+1} es

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}.$$

Esta última ecuación proporciona la definición de la función iterativa del método de Newton.

Definición 1 *El método de Newton es el esquema iterativo de punto fijo basado en la función iterativa*

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)};$$

es decir, que empezando de una aproxiamción inicial p_0, la sucesión $\{p_n\}$ es generada vía $p_n = g(p_{n-1})$.

1.2.2 Análisis de convergencia

Haciendo un análisis más formal en las propiedades de convergencia del método de Newton, en un intento de cuantificar la dependencia en la elección de p_0. La forma más simple de análisis es aplicar el teorema de convergencia general del método de punto fijo. Para hacer esto, se debe mostrar que existe un intervalo, I, el cual contiene a la raíz p, para el cual

1. g es continua en el intervalo I,
2. g mapea a I en I y
3. $|g'(x)| \leq k < 1 \;\; \forall x \in I$.

donde g es la función iterativa del método de Newton. Si las tres condiciones pueden ser establecidas, entonces por el teorema de convergencia general del método de punto fijo, se puede concluir que el método de Newton convergerá para alguna aproximación $p_0 \in I$.

Teorema 3 *Sea $f \in C^2$ en el intervalo $[a, b]$ con $p \in (a, b)$ y $f(p) = 0$. Además supóngase que $f'(p) \neq 0$. Entonces $\exists\, \delta > 0$ tal que para cualquier $p_0 \in I = [p - \delta, p + \delta]$, la sucesión $\{p_n\}$ generada por el método de Newton converge a p.*

Demostración

fill□

1.2.3 Método de Newton con raíces de multiplicidad > 1

El tema final que se discutirá en lo que se refiere a el método de Newton es la interpretación del método cuando $f'(p) = 0$. Si $f(p) = f'(p) = 0$, entonces f debe tener un cero de multiplicidad $m \geq 2$ en $x = p$. Esto implica que f puede ser escrita de la forma

$$f(x) = (x - p)^m q(x),$$

donde $\lim_{x \to p} q(x) \neq 0$. Sustituyendo esta expresión para f en la función iterativa del método de Newton

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

se tiene que

$$g(x) = x - \frac{(x - p)q(x)}{(x - p)q'(x) + mq(x)}$$

y

$$g'(x) = \frac{[m(m-1)q(x) + 2m(x - p)q'(x) + (x - p)^2 q''(x)]q(x)}{[(x - p)q'(x) + mq(x)]^2}.$$

Por tanto, $g(p) = p$ pero $g'(p) = 1 - 1/m$ el cual es distinto de cero para cualquier raíz de multiplicidad más grante de que uno. Por consiguiente, el método de newton proporciona sólo convergencia lineal para raíces de multiplicidad mayor que uno. Ya que el error asintotico está dado por $g'(p)$ la tasa de convergencia en este caso para el método de Newton será $O((1 - 1/m)^n)$. Nótese que para una raíz de multiplicidad mayor que dos, esta tasa de convergencia es más lenta que la del método de la bisección.

1.2.4 Ejercicios

1. Cada una de las siguientes ecuaciones tiene una raíz en el intervalo $(0, 1)$. Utilizar el método de Newton para determinar p_4, es decir la cuatra aproximación a la raíz exacta.

   a) $ln(1 + x) - \cos x = 0$,
   b) $x^5 + 2x - 1 = 0$,
   c) $e^{-x} - x = 0$ y
   d) $\cos x - x = 0$.

   En los ejercicios 2-5, una ecuación, un intervalo en el cual la ecuación tiene una raíz y el valor exacto de la raíz son especificados.

   - Realiza cinco iteraciones del método de Newton.
   - Para $n \geq 1$ compara $|p_n - p_{n-1}|$ con $|p_{n-1} - p|$ y $|p_n - p|$.
   - Para $n \geq 1$ compara el cociente $\frac{|p_n - p|}{|p_{n-1} - p|^2}$ y muestra que este valor aproxima $\left|\frac{f''(p)}{2f'(p)}\right|$.

2. Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$, (1,2), $p = \sqrt{3}$.
3. Sea $f(x) = x^7 - 3$, (1,2), $p = \sqrt[7]{3}$.
4. Sea $f(x) = x^3 - 13$, (2,3), $p = \sqrt[3]{13}$.
5. Sea $f(x) = x^{-1} - 37$, (0.01,0.1), $p = 1/37$.

1.3 Método de la Secante

El método de Newton es una técnica extremadamente fuerte. Con un "buen" punto inicial, la sucesión generada por el método de Newton converge muy rápido (de hecho cuadraticamente). Sin embargo, el método de Newton requiere de la evaluación de fos funciones en cada iteración, a saber la función y su derivada. En esta sección, se desarrolla una técnica conocida como el *método de la secante*, el cual trata ambos de estos aspectos negativos asociados con el método de Newton.

1.3.1 Método de la Secante

El método de la secante puede en realidad ser visto como una variación entre el método de posición falsa y el método de Newton. Como en el método de posición falsa, el método de la secante calcula la siguiente aproximación, p_{n+1} como la intersección con el eje x de una línea que pasa a través de los puntos en la gráfica de f. Las características distintas del método de la secante son las siguientes:

- no se hace ninguna tentativa de mantener un intervalo que contenga a la raíz;
- la línea de la cual p_{n+1} es calculada se para por los puntos asociados con las aproximaciones p_n y p_{n-1}.

La ecuación de esta línea es

$$y - f(p_n) = \frac{f(p_n) - f(p_{n-1})}{p_n - p_{n-1}}(x - p_n),$$

así, p_{n+1} está dado por

$$p_{n+1} = p_n - f(p_n)\frac{p_n - p_{n-1}}{f(p_n) - f(p_{n-1})}.$$

Definición 2 *El método de la secante es una técnica para encontrar raíces basada en la relación recurrente*

$$p_{n+1} = p_n - f(p_n)\frac{p_n - p_{n-1}}{f(p_n) - f(p_{n-1})} \tag{1.1}$$

De esta definición, es claro que el método de la secante no requiere de la derivada de f.

1.3.2 Orden de convergencia

Para dterminar el orden de convergencia para el método de la secante, se necesita deducir la correspondiente ecuación de evolución del error. el primer paso es sustraer la verdadera raíz, p, de ambos lados de la fórmula recursiva para p_{n+1}, obteniendo

$$p_{n+1} - p = p_n - p - f(p_n)\frac{p_n - p_{n-1}}{f(p_n) - f(p_{n-1})}.$$

Los pasos restantes son casi idénticos a los usados para deducir la ecuación de evolución del error para el método de posición falsa. Así, el resultado final es

$$p_{n+1} - p \approx (p_n - p)(p_{n-1} - p)\frac{f''(p)}{2f'(p) + f''(p)(p_n + p_{n-1} - 2p)}.$$

Como p_n y p_{n-1} aproximan a p, el término en el denominador involucra la segunda derivada la cual puede ser reducido y el término importante es el error está dado por

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n||e_{n-1}|, \qquad \text{donde } C = \frac{f''(p)}{2f'(p)}. \tag{1.2}$$

Ahora, imagínese que el método de la secantees de orden α con error asintótico constante λ: es decir, errores sucesivos estan relacionados por la fórmula asintótica $|e_{n+1}| \approx \lambda|e_n|^\alpha$. Esta realción puede se escrita como $|e_n| \approx \lambda|e_{n-1}|^\alpha$, la cual cuando se resuelve para $|e_{n-1}|$, se obtiene $|e_{n-1}| \approx \lambda^{-1/\alpha}|e_n|^{1/\alpha}$. Sustituyendo para $|e_{n+1}|$ y $|e_{n-1}|$ en (1.2) se obtiene

$$\lambda|e_n|^\alpha \approx C|e_n|\lambda^{-1/\alpha}|e_n|^{1/\alpha}. \tag{1.3}$$

Igualando las potencias en $|e_n|$ en (1.3), se sigue que α debe satisfacer la ecuación algebraica $\alpha = 1 + 1/\alpha$. La única raíz positiva de esta ecuación es $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$. Así, el método de la secante es de orden $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$. Además, igualando los coeficientes de $|e_n|$ se obtiene

$$\lambda \approx C^{1/\alpha} = \left(\frac{f''(p)}{2f'(p)}\right)^{\alpha-1}.$$

1.3.3 Ejemplo

Considere la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$, la cual tiene una única raíz en el intervalo $(1, 2)$. Tomando a $p_0 = 2$ y $p_1 = 1$, el método de la secante produce

$$p_2 = p_1 - f(p_1)\frac{p_1 - p_0}{f(p_1) - f(p_0)} = 1 - (-1)\frac{1 - 2}{-1 - 9} = 1.1.$$

Con $p_1 = 1$ y $p_2 = 1.1$, la siguiente aproximación es

$$p_3 = p_2 - f(p_2)\frac{p_2 - p_1}{f(p_2) - f(p_1)} = 1.1 - (-0.549)\frac{1.1 - 1}{-0.549 - (-1)} = 1.2217.$$

Las siguientes cuatro iteraciones producen

$$p_4 = p_3 - f(p_3)\frac{p_3 - p_2}{f(p_3) - f(p_2)} = 1.1964853266.$$

$$p_5 = p_4 - f(p_4)\frac{p_4 - p_3}{f(p_4) - f(p_3)} = 1.1986453684.$$

$$p_6 = p_5 - f(p_5)\frac{p_5 - p_4}{f(p_5) - f(p_4)} = 1.1986913364.$$

$$p_7 = p_6 - f(p_6)\frac{p_6 - p_5}{f(p_6) - f(p_5)} = 1.1986912435.$$

La aproximación p_7 es correcta en los dígitos mostrados y tiene un error absoluto de aproximadamente 3.907×10^{-12}.

Ahora, el error absoluto in p_0 y p_1 y las aproximaciones por el método de la secante son listadas en la siguiente tabla. También se lista el cociente $|e_n|/|e_{n-1}|^{1.618}$.

n	Error absoluto, $\|e_n\|$	$\|e_n\|/\|e_{n-1}\|^{1.618}$
0	8.0130876×10^{-1}	
1	1.9896124×10^{-1}	0.28434
2	9.8691244×10^{-2}	1.34842
3	2.3038247×10^{-2}	0.97658
4	2.2059169×10^{-3}	0.98434
5	4.5875100×10^{-5}	0.91128
6	9.2909772×10^{-8}	0.97192
7	$3.9070969 \times 10^{-12}$	0.93225

Nótese que el cociente $|e_n|/|e_{n-1}|^{1.618}$ se aproxima a una constante, de ese modo provando numericamente que el orden de convergencia de la sucesión es $\alpha = 1.618$. Además, el cociente del error parece aproximar a

$$\left(\frac{f''(p)}{2f'(p)}\right)^{0.618} \approx 0.94759,$$

confirmando que la constante del error asintótico para el método de la secante es $\lambda = (f''(p)/2f'(p))^{\alpha-1}$.

1.3.4 Ejercicios

1. Cada una de las siguientes ecuaciones tiene una raíz en el intervalo $(0, 1)$. Utilizar el método de la secante para determinar p_4, es decir la cuatra aproximación a la raíz exacta.

   a) $ln(1 + x) - \cos x = 0$,

   b) $x^5 + 2x - 1 = 0$,

   c) $e^{-x} - x = 0$ y

   d) $\cos x - x = 0$.

2. Muestra que la ecuación del método de la secante puede ser escrita como

$$p_{n+1} = \frac{f(p_n p_{n-1} - f(p_{n-1})p_n}{f(p_n) - f(p_{n-1})}.$$

   En los ejercicios 3-6, una ecuación, un intervalo en el cual la ecuación tiene una raíz y el valor exacto de la raíz son especificados.

   - Realiza siete iteraciones del método de la secante.
   - Para $n \geq 2$ compara $|p_n - p_{n-1}|$ con $|p_{n-1} - p|$ y $|p_n - p|$.
   - Para $n \geq 2$ compara el cociente $\frac{|p_n - p|}{|p_{n-1} - p|^{1.618}}$ y muestra que este valor aproxima $\left|\frac{f''(p)}{2f'(p)}\right|^{0.618}$.

3. Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$, (1,2), $p = \sqrt{3}$.

4. Sea $f(x) = x^7 - 3$, (1,2), $p = \sqrt[7]{3}$.

5. Sea $f(x) = x^3 - 13$, (2,3), $p = \sqrt[3]{13}$.

6. Sea $f(x) = x^{-1} - 37$, (0.01,0.1), $p = 1/37$.

Chapter 2

Interpolación

Dado un conjunto de puntos (x_i, f_i) para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, donde los x_i son valores distintos de la variable independiente y las f_i son los valores correspondientes de alguna función f, es decir, aproximaciones de los valores de f en algunos valores de x no listados entre los x_i o determinan una función g que en algun sentido aproxima los datos.

Los datos del problema pueden también incluir valores de las derivadas además de los valores de la función. En algunos casos, los datos del problema serán especificados como la función f en sí misma, en vez de como un conjunto discreto de puntos de la gráfica de f. En estos casos, se busca una función g que es menos costosa de evaluar y/o más fácil de manipular.

El problema matemático indicado arriba en realidad da origen a dos diferentes áreas de estudio: *interpolación* y *aproximación*. En la interpolación, la función g determinada requiriendo que el error en cada punto x_i sea igual a cero, es decir, cumpliendo las condiciones $g(x_i) = f_i$ para cada $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Así, la interpolación trata al error en una forma un tanto local. La aproximación, por otro lado, trata al error de una manera más global, requiriendo de alguna medida de error, tal como que la suma de los cuadrados de las difeencias entre $g(x_i)$ y f_i se minimizada.

Hay diferentes tipos de interpolación, dependiendo en la clase de funciones de la cual g es seleccionada. Las técnicas más comunes de interpolación son

1. Interpolación polinomial
2. Interpolación polinomial *piecewise* (spline)
3. Interpolación racional
4. Interpolación trigonométrica
5. Interpolación exponencial

El objetivo de esre capítulo será desarrollar las técnicas de interpolación polinomial y polinomial piecewise. Existen tres principales razones para en estas técnicas de interpolación. La primera, el polinomio

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

puede ser evaluado muy facilmente usando el algoritmo de divisón sintética. Segundo, las derivadas e integrales de polinomios son faciles de calcular y estas siguen siendo polinomios. Tercero, los polinomios satisfacen propiedades importantes como la propiedad de aproximación uniforme. Esto es expresado por el siguiente teorema debido a Weierstrass, una demostración se puede encontrar en [**?**].

Teorema 4 (Teorema de aproximación de Weierstrass) *Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Dada cualquier $\epsilon > 0$, existe un polinomio P tal que*

$$\|f - p\|_\infty \equiv \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

Este polinomio de interplación no es más que el polinomio de Taylor:

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Este es un polinomio de interpolación en el sentido de que iguala los valores de la función y las primeras n derivadas en la ubicación $x = x_0$. Ya que este polinomio un como de información local a cerca de la función f, este es bueno para hacer aproximaciones locales. El error asociado con el polinomio de Taylor esta dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

donde c esta entre x y x_0. Así, el error esta acotado por

$$\max |f^{(n+1)}(x)| \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Se observa que esta cota puede ser grande de dos diferentes formas: Si $\max |f^{(n+1)}(x)|$ es grande o si x esta muy lejos de x_0.

2.1 La forma de Lagrange del polinomio de interpolación

Sean $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n + 1)$ distintos puntos (aunque no necesariamente espaciados uniformemente) a lo largo de la recta real y sea f_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ el valor de la función asociado con el punto x_i. Los x_i pueden ser referidos como abcisas, nodos o puntos de interpolación. Asi, se desea buscar un polinomio, P_n de grado a lo más n que satisface $P_n(x_i) = f_i$ para cada $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

2.1.1 Interpolación lineal

Se inicia con el caso más simple que es la interpolación lineal. Los datos en este caso consisten de dos nodos, x_0 y x_1 y sus correspondientes f_0 y f_1. El objetivo es encontrar un polinomio lineal, $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ tal que

$$P_1(x_0) = a_0 + a_1 x_0 = f_0$$

y

$$P_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 = f_1.$$

La solución de esas condiciones de interpolación es

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \quad \text{y} \quad a_0 = \frac{x_1 f_0 - x_0 f_1}{x_1 - x_0},$$

tal que

$$P_1(x) = \frac{x_1 f_0 - x_0 f_1}{x_1 - x_0} + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} x.$$

La fórnula para $P_1(x)$ puede ser agrupada de la siguiente forma

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f_1.$$

Claramente, se identifica y distingue la dependencia del polinomio de interpolación en los valores de la función f de la dependencia en los puntos de interpolación.

2.1.2 Interpolación para grados superiores

Si más de dos datos son disponibles, un polinomio de interpolación de grado superior puede ser construido. Suponga que $n+1$ datos son disponibles. Cada dato se traduce en una condición de interpolación, por consiguiente, con $n+1$ puntos, habrá $n+1$ condiciones de interpolación, las cuales permitirán determinar los $n+1$ coeficientes del polinomio de interpolación. Ya que un polinomio de grado n tiene $n+1$ coeficientes se sigue que los $n+1$ datos pueden determinar a un polinomio de grado a lo más n.

Para determinar este polinomio de grado a lo más n, se podrían aplicar las condiciones de interpolación para producir un sistema lineal de ecuaciones para los coeficientes del polinomio. Una forma más eficiente para obtener el polinomio de interpolación puede ser encontrada observando la fórmula dada para el polinomio de interpolación lineal. En particular, observando la estructura de los coeficientes de los valores de las funciones.

$$P_1(x) = \underbrace{\frac{x-x_1}{x_0-x_1}}_{\substack{\text{polinomio de}\\ \text{grado uno}\\ x=x_0,\,\text{valor}=1\\ x=x_1,\,\text{valor}=0}} f_0 + \underbrace{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}}_{\substack{\text{polinomio de}\\ \text{grado uno}\\ x=x_0,\,\text{valor}=0\\ x=x_1,\,\text{valor}=1}} f_1.$$

Se observa que esos coeficientes son polinomios del mismo grado como el polinomio de interpolación total. Además el coeficiente de f_0 vale 1 en $x = x_0$, el punto de interpolación asociado con el valor de la función f_0 y vale cero en el otro punto. Un similar resultado vale para el coeficiente de f_1: el valor es 1 en el punto asociado con f_1, pero es cero en el otro punto. Esos coeficientes polinomiales son llamados *polinomios de Lagrange* y son denotados por

$$L_{1,0}(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \quad \text{y} \quad L_{1,1}(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

El primer subíndice indica el grado del polinomio, mientras que el segundo indica el punto de interpolación asociado. Con esta notación, P_1 puede ser expresado de una forma muy compacta como

$$P_1(x) = L_{1,0}(x) f_0 + L_{1,1}(x) f_1 = \sum_{i=0}^{1} L_{1,i}(x) f_i.$$

La simplicidad de esta representación sugiere la obtención de polinomios de interpolación de orden superior pero generalizando la noción de un polinomio de Lagrange.

Definición 3 *El Polinomio de Lagrange $L_{n,j}(x)$ es un polinomio de grado n y esta asociado con el punto de interpolación x_j en el sentido*

$$L_{n,j}(x) = \begin{cases} 1, & si \quad i = j \\ 0, & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Con esta familia de funciones, es directo demostrar que

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f_i,$$

interpola los datos (x_j, f_j) para $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Para cada x_j

$$\begin{aligned} P_n(x_j) &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} \underbrace{L_{n,i}(x_j)}_{\substack{1,\ \text{si}\ \ i=j\\ 0,\ \text{si}\ \ i\neq j}} f_i \\ &= 0 \cdot f_0 + \cdots + 0 \cdot f_{j-1} + 1 \cdot f_j + 0 \cdot f_{j+1} + \cdots + 0 \cdot f_n \\ &= f_j. \end{aligned}$$

Ya que $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f_i$ esta basado en los polinomios de Lagrange, P_n es conocido como el Polinomio de Interpolación de la Forma de Lagrange.

La pieza final necesaria para la construcción del polinomio de interpolación de la forma de Lagrange es obtener una fórmula explicita para $L_{n,j}$. Afortunadamente, esa puede ser determinada aplicando directamente la condición enunciada en la definición. Ya que $L_{n,j}$ es un polinomio de grado n con n raices localizadas en $x = x_i$ $(i \neq j)$, se sigue que $L_{n,j}$ debe ser de la forma

$$c(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n),$$

para alguna constante c. La condición final de la definición es que $L_{n.j} = 1$, la cual determina el valor de c:

$$c = \frac{1}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} L_{n,j} &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \\ &= \prod_{i=0,\ i \neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}. \end{aligned}$$

2.1.3 Unicidada del polinomio de interpolación

El siguiente teorema muestra que dados $n + 1$ puntos de interpolación distintos y los valores de la función correspondientes, existe sólo un polinomio de grado a lo más n el cual interpola los datos. Este polinomio puede desde luego ser escrito en diferentes formas, cada una teniendo sus ventajas y desventajas, pero todas ellas representan exactamente la misma función.

Teorema 5 *Si $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ son $n + 1$ puntos distintos y f esta definida en $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces existe un único polinomio, P, de grado a lo más n tal que P interpola f; es decir,*

$$P(x_i) = f(x_i),$$

para cada $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Así, P es llamado el POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN.

Demostración

Existencia

Ya que los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ son distintos, el polinomio

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f_i,$$

interpola los datos este es precisamente el polinomio de interpolación de Lagrange. Así, la existencia ha sido establecida.

Unicidad

Esta parte de la demostraión será por contradicción. Suponga que P y Q son dos polinomios distintos de grado a lo más n los cuales interpolan a f en los $n + 1$ distintos puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Considere la función $h(x) = P(x) - Q(x)$. Ya que P y Q son polinomios de grado a lo más n, h es también un polinomio de grado a lo más n. Además, ya que P y Q interpolan los mismos datos, se sigue que

$$h(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = f_i - f_i = 0,$$

para cada $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Por consiguiente, h es un polinomio de grado a lo más n con $n + 1$ raices. El Teorema Fundamental del Algebra garantiza que la única forma que eso pueda pasar es si $h(x) \equiv 0$. Esto implica que $P = Q$, lo cual contradice la suposición. Así, el polinomio de interpolación es único. $\square$

2.1.4 Error de interpolación

Uno de los principales beneficios del teorema de unicidad es que este permite una discusión general del error de interpolación. Debido a las diversas formas del polinomio de interpolación son sólo diferentes formas de escribir la misma función, el error de interpolación no depende en la forma seleccionada para el polinomio de interpolación y no hay necesidad de tratar cada caso por separado.

Teorema 6 *Si $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ son $n+1$ puntos distintos en $[a, b]$ y f es continua en $[a, b]$ y tiene $n+1$ derivadas continuas en (a, b) entonces para cada $x \in [a, b]$ existe un $\xi(x) \in [a, b]$ tal que*

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),$$

donde P es el polinomio de interpolación.

Demostración

2.1.5 Ventajas y desventajas de la Forma de Lagrange

Una de las ventajas del polinomio de interpolación de la forma de Lagrange es la simplicidad de su deducción. Ya que la forma de Lagrange aisla la dependencia del polinomio de interpolación en los valores de la función, esta forma es util cuando los puntos de interpolación son fijos, pero los valores de la función correspondiente estan cambiando frecuentemente. La principal ventaja de la forma de Lagrange, no obstante, es su valor teórico. Por otro lado, si más datos son disponibles, el trabajo realizado para generar la forma de Lagrange original no puede ser utilizada para calcular un polinomio de grado mayor. El proceso debe comenzarse desde el principio. Finalmente, el polinomio de interpolación de la forma de Lagrange es muy engorroso para operaciones comunes de polinomios tal como evaluaciones, diferenciación e integración.

2.1.6 Ejercicios

1. Sea $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.
   (a) Determina las fórmulas para los polinomios de Lagrange $L_{2,0}(x)$, $L_{2,1}(x)$ y $L_{2,2}(x)$ asociados con los puntos de interpolación dados.
   (b) Grafica $L_{2,0}(x)$, $L_{2,1}(x)$ y $L_{2,2}(x)$ sobre el intervalo $[-1, 2]$.
2. Sea $x_0 = -3$, $x_1 = 0$, $x_2 = e$ y $x_3 = \pi$.
   (a) Determina las fórmulas para los polinomios de Lagrange $L_{3,0}(x)$, $L_{3,1}(x)$, $L_{3,2}(x)$ y $L_{3,3}(x)$ asociados con los puntos de interpolación dados.
   (b) Grafica $L_{3,0}(x)$, $L_{3,1}(x)$, $L_{3,2}(x)$ y $L_{3,3}(x)$ sobre el intervalo $[-3, \pi]$.
3. Sea x_0 =0.0, x_1 =1.6, x_2 =3.8, x_3 =4.5, x_4 =6.3, x_5 =9.2 y x_6 =10.0
   (a) Determina las fórmulas para los polinomios de Lagrange $L_{6,0}(x)$, $L_{6,2}(x)$ y $L_{6,5}(x)$ asociados con los puntos de interpolación dados.
   (b) Grafica $L_{6,0}(x)$, $L_{6,2}(x)$ y $L_{6,5}(x)$ sobre el intervalo $[0, 10]$.
4. Considera la función $f(x) = ln(x)$.
   (a) Construye el polinomio de interpolación de la forma de Lagrange para f pasando por los puntos (1,ln1), (2,ln2) y (3,ln3).
   (b) Grafica el polinomio obtenido en (a) junto con $f(x) = lnx$ sobre el intervalo $[1, 3]$. Después genera una grafica de la diferencia entre el polinomio de interplación y $f(x) = ln(x)$.
   (c) Usa el polinomio obtenido en la parte (a) para estimar ln(1.5) y ln(2.4). ¿Cuál es el error en cada aproximación?

x	-1	0	1	2
y	5	1	1	11

5. Considera los siguientes datos
   (a) Mostrar que ambos polinomios $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ y $g(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{15}{8}x^2 - \frac{11}{4}x + 1$ interpolan a todos los datos.
   (b) ¿Por qué esto no contradice la parte de la unicidad del Teorema de existencia y unicidad del polinomio de interpolación?
6. Sea f una función continua con primera y segunda derivadas continuas en el intervalo $[x_0, x_1]$. Deduce la siguiente cota para el error debida a la interpolación lineal de f:
   $$|f(x) - P_1(x)| \leq \frac{1}{8}h^2 \max_{x \in [x_0, x_1]} |f''(x)|,$$
   donde $h = x_1 - x_0$.
7. El siguiente conjunto de datos fue tomado de un polinomio de grado a lo más cinco. Encuentra el polinomio.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	39	3	-1	-3	-9	-1

8. Considera los siguientes datos Determina el polinomio de interpolación de grado a lo más ocho el

x	0	1.25	1.85	2.40	3.05	3.64	4.25	4.85	5.45
y	0	4	6	8	10	12	14	16	18

   cual interpola los datos anteriores. Sobre que intervalo de x los valores aproximados de y son buenos? Explica.
9.
10.

2.2 La forma de Newton del polinomio de interpolación

2.2.1 Forma de Newton del polinomio de interpolación

2.2.2 Diferencias divididas

2.2.3 Error de interpolación

2.3 Interpolación lineal *piecewise*

2.3.1 La interpolación lineal piecewise

2.3.2 Error en la interpolación lineal piecewise

2.4 Interpolación *spline* cúbico

2.4.1 La interpolación spline cúbico

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$ y sean

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$n+1$ puntos distintos en los cuales f es interpolada. Recordemos que x_i divide a $[a,b]$ en n subintervalos, referidos estos como una partición de $[a,b]$.

Definición 4 *Una interpolación spline cubica de f relativa a la partición*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

es una función s que satisface las siguientes condiciones:

(1) *en cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0,1,2,\ldots,n-1$, s coincide con el polinomio cúbico*

$$s(x) = s_j(x) = a_j + b_j(x-x_j) + c_j(x-x_j)^2 + d_j(x-x_j)^3;$$

(2) *s interpola a f en $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$;*

(3) *s es continua en $[a,b]$;*

(4) *s' es continua en $[a,b]$;*

(5) *s'' es continua en $[a,b]$;*

Aun que esta definición aclara las características importantes de un spline cúbico, esta no proporciona suficiente información para determinar completamente la función de interpolación. La función s esta compuesta de n polinomios cúbicos diferentes, cada uno con cuatro coeficientes, así que hay un total de $4n$ incognitas. La interpolación de $n+1$ ecuaciones. Por la continuidad del spline y sus primeras dos derivadas proporcionan $3(n-1)$ ecuaciones. La definición de un spline cúbico por consiguiente da $n+1+3(n-1) = 4n-2$ ecuaciones. Para determinar completamente la función de interpolación, dos ecuaciones más tienen que ser especificadas.

Más adelante, se dicutirán dos diferentes tipos de restricciones adicionales o condiciones de frontera: las condiciones de frontera *not-a-knot* y *clamped*.

Afortunadamente, incluso después de haber especificado más de dos ecuaciones, el sistema completo de $4n$ ecuaciones con $4n$ incognitas puede ser resuelto facilmente. Para observar como hacer esto, se escribirán las ecuaciones como se plantearón en la definición.

Condición de interpolación:

$$s_j(x_j) = a_j = f(x_j), \qquad j = 0,1,2,\ldots,n$$

Continuidad del spline:

$$a_{j+1} = a_j + b_jh_j + c_jh_j^2 + d_jh_j^3, \qquad j = 0,1,2,\ldots,n-2$$

Continuidad de la primera derivada del spline:

$$b_{j+1} = b_j + 2c_jh_j + 3d_jh_j^2, \qquad j = 0,1,2,\ldots,n-2$$

Continuidad de la segunda derivada del spline:

$$c_{j+1} = c_j + 3d_jh_j, \qquad j = 0,1,2,\ldots,n-2$$

Para simplificar las ecuaciones, se ha definido $h_j = x_{j+1} - x_j$. Se observa que se esta usando el hecho que $a_n = f(x_n) = f(b)$ la cual es una lijera extensión a la notación introducida en la definición de una interpolación spline cúbica.

Las condiciones de interpolación directamente proporcionan los valores de las a_j, así se puede obtener una cuarta parte de las incognitas. Después, hay que resolver la ecuación de la continuidad de la segunda derivada del spline para d_j:

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}. \tag{2.1}$$

Sustituyendo esta expresión en las ecuaciones de la continuidad del spline y de la continuidad de la primera derivada se obtiene

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + \frac{c_{j+1} - c_j}{3} h_j^2 \\ &= a_j + b_j h_j + \frac{c_{j+1} + 2c_j}{3} h_j^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

y

$$\begin{aligned} b_{j+1} &= b_j + 2c_j h_j + (c_{j+1} - c_j) h_j \\ &= b_j + (c_{j+1} + c_j) h_j. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Finalmente, resolviendo la ecuación 2.2 para b_j:

$$b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{2c_j + c_{j+1}}{3} h_j, \tag{2.4}$$

y sustituyendo este resultado en la ecuación 2.3. Después de realizar algunas manipulaciones algebráicas y moviendo los subíndices un índice abajo, se obtiene

$$h_{j-1} c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j) c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}). \tag{2.5}$$

Esta ecuación vale para $j =, 1, 3, \ldots, n-1$ y forma la báse para un sistema tridiagonal de ecuaciones para determinar las c_j. Las ecuaciones para $j = 0$ y $j = n$ dependen en el tipo de condiciones de frontera que sean aplicados.

Apesar de la elección de las condiciones de frontera, el calulo de los coeficientes de una interpolación spline cúbico es un proceso en dos estapas. Primero, resolver el sistema lineal para las c_j. Una vez hecho esto, la ecuación 2.1 es usada para calcular las d_j y la ecuación 2.4 es usada para calcular las b_j. Recordando que las a_j están dadas por los valores de las función, $f(x_j)$. La evaluación de una interpolación spline cúbico, como cualquier función piecewise, también es un proceso de dos pasos. Basado en el valor de la variable, el independiente, la parte del polinomio la cual necesita ser evaluada debe primero ser determinada. Una vez que la parte del polinomio a sido seleccionada, el valor de la interpolación en el valor de la variable independiente dada puede ser calculada.

2.4.2 Not-a-Knot boundary conditions

Cuando no hay más información más que el valor de f en cada punto de interpolación, es recomendado aplicar las condiciones de frontera *not-a-knot*. Estas condiciones requieren que s''' sea continua en $x = x_1$ y $x = x_{n-1}$. En términos de los coeficientes del spline, esto se traduce a

$$d_0 = d_1 \qquad \text{y} \qquad d_{n-2} = d_{n-1}.$$

Usando 2.1 y reagrupando términos, estas ecuaciones pueden ser expresadas en términos de las c_j como

$$h_1 c_0 - (h_0 - h_1) c_1 + h_0 c_2 = 0 \tag{2.6}$$

$$h_{n-1} c_{n-2} - (h_{n-2} + h_{n-1}) c_{n-1} + h_{n-2} c_n = 0 \tag{2.7}$$

Desafortunadamente las ecuaciones 2.6 y 2.7 no preservan la estructura tridiagonal de 2.5. Esta situación, sin embargo, puede ser solucionada como sigue. Resolver la ecuación 2.6 para c_0 y la ecuación 2.7 para c_n. Esto da

$$c_0 = \left(1 + \frac{h_0}{h_1}\right) c_1 - \frac{h_0}{h_1} c_2 \tag{2.8}$$

$$c_n = -\frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}c_{n-2} + \left(1 + \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}\right)c_{n-1}. \tag{2.9}$$

Ahora, sutituyendo c_0 de 2.8 en 2.5, para $j = 1$ y agrupando términos se obtiene

$$\left(3h_0 + 2h_1 + \frac{h_0^2}{h_1}\right)c_1 + \left(h_1 - \frac{h_0^2}{h_1}\right)c_2 = \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0). \tag{2.10}$$

Procediendo en una forma similar con la expresión para c_n de 2.9 sustituyendo en 2.5 para $j = 1$ se tiene

$$\left(h_{n-2} - \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}\right)c_{n-2} + \left(3h_{n-1} + 2h_{n-2} + \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}\right)c_{n-1} = \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}). \tag{2.11}$$

La ecuación 2.5 para $j = 2, 3, 4, \ldots, n-2$, junto con las ecuaciones 2.10 y 2.11 constituyen un sistema tridiagonal completo àra los coeficientes $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}$. Ya que cada h_j es positiva por definición, la matriz de coeficientes para este sistema lineal es diagonal estrictamente dominante. Así, existe siempre una única solución para las c_j.

2.4.3 Clamped boundary conditions

Si los valores $f'(a)$ y $f'(b)$ son conocidos, entonces es mejor alpicar la condición de frontera *clamped*, es decir, $s'(a) = f'(a)$ y $s'(b) = f'(b)$. Empezando con $x = a$ se encuentra $f'(a) = s'(a) = s_0'(a) = b_0$. La ecuación (2.4) con $j = 0$ permite escribir esas condiciones en términos de las c_j:

$$f'(a) = \frac{a_1 - a_0}{h_0} - \frac{2c_0 + c_1}{3}h_0$$

o

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a). \tag{2.12}$$

En $x = b$, $f'(b) = s'(b) = s_n'(b) = b_n$. Usando la ecuación (2.3) para expresar b_n en términos de b_{n-1}, c_{n-1} y c_n, se sigue por la ecuación (2.4) que se puede re-escribir a b_{n-1} en términos de a_{n-1}, a_n, c_{n-1} y c_n, obteniendo la ecuación

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}). \tag{2.13}$$

Combinando la ecuación (2.5) para $j = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ con las ecuaciones (2.12) y (2.13) proporcionan un sistema lineal tridiagonal completo para determinar las c_j. Como con la condición de frontera not-a-knot, la matriz de coeficientes asociados con la condición de frontera clamped es diagonal estrictamente dominante; así, esto garantiza una solución única para las c_j.

2.4.4 Error en la interpolación spline cúbico

2.4.5 Ejercicios

Para los ejercicios del 1-3, usar los valores siguientes para la temperatura T, la presión p y la densidad ρ, de la atmósfera estándar en función de la altitud. Estos datos fueron tomados de la Tabla A.6 en Frank White, *Fluid Mechanics*:

$z(m)$	0	500	1000	1500	2000	2500	3000
$T(K)$	288.16	284.91	281.66	278.41	275.16	271.91	268.66
$p(Pa)$	101.350	95.480	89.889	84.565	79.500	74.684	70.107
$\rho(kg/m^3)$	1.2255	1.1677	1.1120	1.0583	1.0067	0.9570	0.9092

1. Usando la interpolación spline cúbico not-a-knot, estimar la temperatura de la atmósfera estándar a una altitud de $z = 800$ m, $z = 1600$ m, $z = 2350$ m y $z = 2790$ m. ¿A qué altitud la temperatura de la atmósfera es de 273.1 K?

2. Usando la interpolación spline cúbico con not-a-knot, estimar la presión de la atmósfera estándar a una altitud de $z = 800$ m, $z = 1600$ m, $z = 2350$ m y $z = 2790$ m.

3. Usando la interpolación spline cúbico con not-a-knot, estimar la densidad de la atmósfera estándar a una altitud de $z = 800$ m, $z = 1600$ m, $z = 2350$ m y $z = 2790$ m. ¿A qué altitud la densidad de la atmósfera es de 1.1000 km/m^3?

4. Considera los siguientes datos:

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
y	0.500000	1.425639	2.640859	4.009155	5.305472
y'	1.500000				2.305472

(a) Construye el spline cúbico not-a-knot para estos datos.

(b) Construye el spline clamped para estos datos.

(c) Los datos para este problema fueron tomados de la función $y = (x + 1)^2 - 0.5e^x$. Grafica el error de cada uno de los splines de la partes (a) y (b) como función de x. ¿Cuál spline produce el mejor resultado?