Bases y Dimensión

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial. Se dice que el subconjunto S de V es una base de V si*
(a) S genera a V
(b) S es linealmente independiente

Ejemplo Consideremos el espacio $V = \mathbb{R}^2$ y los vectores $e_1 = (1, 0),\ e_2 = (0, 1) \in V$. Vamos a mostrar que el conjunto

$$\beta = \{e_1, e_2\}$$

es una base para V.

1. Primero comprobamos independencia lineal. En este caso según la definición

$$c_1e_1 + c_2e_2 = (0, 0) \Rightarrow c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (0, 0) \Rightarrow (c_1, 0) + (0, c_2) = (0, 0) \Rightarrow c_1 = 0,\ c_2 = 0$$

   por lo que $c_1e_1 + c_2e_2 = (0, 0)$ sólo si $c_1 = c_2 = 0$. Los vectores son linealmente independientes.

2. Para ver que $\mathcal{L}(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ debemos hallar escalares $c_1,\ c_2$ tal que

$$(x, y) = c_1e_1 + c_2e_2$$

   esta expresión nos lleva a

$$(x, y) = (c_1, c_2)$$

   por lo que $c_1 = x$ y $c_2 = y$ son los escalares buscados, de esta manera $\mathcal{L}(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2$

Según lo anterior β es una base para $V = \mathbb{R}^2$

Ejemplo Los vectores $v_1 = (3, 1, -1)$, $v_2 = (4, 1, 1)$ y $v_3 = (1, 2, 3)$ constituyen una base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.
En efecto pues si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $v_1,\ v_2,\ v_3$, es decir existen escalares $c_1,\ c_2,\ c_3$ tales que

$$(x, y, z) = c_1(3, 1, -1) + c_2(4, 1, 1) + c_3(1, 2, 3)$$

Al realizar las operaciones indicadas e igualando las correspondientes coordenadas de los vectores involucrados se obtiene

$$\begin{aligned} 3c_1 + 4c_2 + c_3 &= x \\ c_1 + c_2 + 2c_3 &= y \\ -c_1 + c_2 + 3c_3 &= z \end{aligned}$$

éste es un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas cuyo determinante es

$$\det \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

por lo que el sistema tiene una única solución, por lo que los vectores $v_1,\ v_2,\ v_3$ generan $\mathbb{R}^3$

Teorema 1. *El subconjunto $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ del espacio vectorial V es una base de V si, y solo si cada vector $v \in V$ es expresado de manera única como una combinación lineal de los vectores de β*

Demostración. Supóngase que $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base de V. Sea $v \in V$ arbitrario de V. Existe entonces escalares $c_1, c_2, ..., c_n$ tales que

$$v = c_1v_1 + c_2v_2+, ..., +c_nv_n$$

Supóngase ahora que v también tiene la representación

$$v = d_1v_1 + d_2v_2+, ..., +d_nv_n$$

entonces

$$c_1v_1 + c_2v_2+, ..., +c_nv_n = d_1v_1 + d_2v_2+, ..., +d_nv_n$$

o sea

$$(c_1 - d_1)v_1 + (c_2 - d_2)v_2+, ..., +(c_n - d_n)v_n = 0$$

como los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ son linealmente independientes entonces $c_i - d_i = 0, \ \ \forall \ i = 1, ..., n$
por lo tanto la representación de $v \in V$ como combinación lineal de los vectores de la base β es única.
Reciprocamente, supóngase que cada $v \in V$ es representado de manera única como combinación lineal de los elementos de β. En tal caso se tiene que

$$L(v_1, v_2, ..., v_n) = V$$

Ahora para ver que son linealmente independientes, consideramos la combinación lineal

$$c_1v_1 + c_2v_2+, ..., +c_nv_n = 0$$

esta expresión se puede ver como la representación del vector $=\in V$, pero también se tiene la representación

$$0v_1 + 0v_2+, ..., +0v_n = 0$$

en vista de la unicidad de la representación supuesta en la hipótesis, se concluye que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, es decir los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ son linealmente independientes y por lo tanto constituyen una base de V. □

Ejemplo Considere los vectores $v_1 = 1, \ v_2 = x, \ v_3 = x^2, ..., v_{n+1} = x^n$ en el espacio vectorial $V = P_n(\mathbb{R})$.
Mostraremos que

$$\mathcal{L}(v_1, \ v_2, \ v_3, ..., v_{n+1}) = P_n(\mathbb{R})$$

Tenemos que al escribir

$$c_1(1) + c_2v_1 + c_3v_3 + \cdots + c_{n+1}v_{n+1} = 0(1) + 0x + \cdots + 0x^n$$

se concluye que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{n+1} = 0$$

por tanto los vectores son linealmente independientes.
Por otro lado

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = a_0v_1 + a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nV_n$$

de manera que

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathcal{L}(v_1,\ v_2,\ v_3, ..., v_{n+1})$$

concluimos que

$$\mathcal{L}(v_1,\ v_2,\ v_3, ..., v_{n+1}) = P_n(\mathbb{R})$$

Teorema 2. *Suponga que en el espacio vectorial V existen n vectores $v_1, ..., v_n$ que lo generan. Entonces cualquier conjunto linealmente indepenciente en V es finito y no contiene más de de n vectores*

Demostración. Considérese el conjunto de m vectores en V, $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, en donde $m > v$. Como $L(v_1, ..., v_n) = V$, para cada u_i existe $a_{ij},\ i = 1, ..., n$ escalares tales que

$$u_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{nj}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i, \quad j = 1, ..., m$$

formamos la combinación lineal

$$c_1u_1 + c_2u_u + \cdots + c_mu_m$$

sustituimos los valores

$$c_1u_1 + c_2u_u + \cdots + c_mu_m = \sum_{j=1}^{m} c_ju_j = \sum_{j=1}^{m} c_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j \right) v_i$$

Sea A la matriz de orden $n \times m$ de coeficientes a_{ij}.
Considérese el sistema homogeneo de n ecuaciones con m incognitas $AX = 0$. Como estamos suponiendo que $m > n$, existen entonces $c_1, ..., c_m$ no todos cero tales que $A\tilde{X} = 0$, donde $\tilde{X}$ es la matrix de orden $m \times 1$ de elementos $c_1, ..., c_m$. Entonces se satisfacen las relaciones

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j = 0, \quad i = 1, ..., n$$

sustituimos en

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j \right) v_i = \sum_{i=1}^{n} (0)\, v_i = 0$$

obtenemos que

$$c_1u_1 + c_2u_u + \cdots + c_mu_m = 0$$

en donde no todos los escalares $c_1, ..., c_m$ son iguales a cero. Es decir, el conjunto S es linealmente dependiente. □

Ejemplo Establezca una base del espacio vectorial S dado por

$$S = \{(x, y, z) \mid 2x + 5y + 6z = 0\}$$

En este caso si hacemos

1. $x = 2,\ y = 3$ se tiene
$$2(2) + 5(3) + 6z = 0 \ \Rightarrow \ z = -\frac{19}{6}$$
obtenemos asi
$$v_1 = \left(2, 3, -\frac{19}{6}\right)$$

2. $x = 1,\ y = 1$ se tiene
$$2(1) + 5(1) + 6z = 0 \ \Rightarrow \ z = -\frac{7}{6}$$
obtenemos asi
$$v_2 = \left(1, 1, -\frac{7}{6}\right)$$

ahora consideremos
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v_1, v_2) &= c_1\left(2, 3, -\frac{19}{6}\right) + c_2\left(1, 1, -\frac{7}{6}\right) \\ &= \left(2c_1, 3c_1, -\frac{19}{6}c_1\right) + \left(c_2, c_2, -\frac{7}{6}c_2\right) \\ &= \left(2c_1 + c_2, 3c_1 + c_2, -\frac{19}{6}c_1 - \frac{7}{6}c_2\right) \end{aligned}$$

Esto nos lleva al sistema
$$\begin{bmatrix} x = 2c_1 + c_2 \\ y = 3c_1 + c_2 \\ z = -\frac{19}{6}c_1 - \frac{7}{6}c_2 \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} 2x = 4c_1 + 2c_2 \\ 5y = 15c_1 + 5c_2 \\ 6z = -19c_1 - 7c_2 \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ 2x + 5y + 6z = 0$$

Por tanto
$$\mathcal{L}(v_1, v_2) = S$$

Para ver si son linealmente independientes, tenemos que
$$c_1\left(2, 3, -\frac{19}{6}\right) + c_2\left(1, 1, -\frac{7}{6}\right) = (0, 0, 0)$$

implican que
$$c_1 = c_2 = 0$$

por tanto los vectores v_1, v_2 son linealmente inedepndientes.
Así que, una base para S, sería
$$\beta = \left\{\left(2, 3, -\frac{19}{6}\right), \left(1, 1, -\frac{7}{6}\right)\right\}$$

Ejemplo Muestre que el conjunto

$$S = \{x^2 + 3x - 2, 2x^2 + 5x - 3, -x^2 - 4x + 4\}$$

es una base para el espacio $V = P_2(\mathbb{R})$.
Para esto se tiene

a) veamos la combinación lineal

$$c_1(x^2 + 3x - 2) + c_2(2x^2 + 5x - 3) + c_3(-x^2 - 4x + 4) = 0x^2 + 0x + 0$$

esto es

$$(c_1 + 2c_2 - c_3)x^2 + (3c_1 + 5c_2 - 4c_3)x + (2c_1 - 3c_2 + 4c_3) = 0x^2 + 0x + 0$$

lo que nos lleva al sistema

$$\begin{bmatrix} 0 = c_1 + 2c_2 - c_3 \\ 0 = 3c_1 + 5c_2 - 4c_3 \\ 0 = 2c_1 - 3c_2 + 4c_3 \end{bmatrix}$$

cuya única solución es la trivial $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Por lo tanto los vectores son linealmente independientes

b) Para ver que $\mathcal{L}(x^2 + 3x - 2, 2x^2 + 5x - 3, -x^2 - 4x + 4) = P_2(\mathbb{R})$, sea $ax^2 + bx + c \in P_2(\mathbb{R})$ debemos hallar escalares c_1, c_2, c_3 de manera que

$$ax^2 + bx + c = c_1(x^2 + 3x - 2) + c_2(2x^2 + 5x - 3) + c_3(-x^2 - 4x + 4)$$

esto nos conduce a

$$\begin{bmatrix} a = c_1 + 2c_2 - c_3 \\ b = 3c_1 + 5c_2 - 4c_3 \\ c = -2c_1 - 3c_2 + 4c_3 \end{bmatrix}$$

cuya solución es

$$\begin{bmatrix} c_1 = -8a + 5b + 3c \\ c_2 = 4a - 2b - c \\ c_3 = b + c - a \end{bmatrix}$$

Ejemplo Dado el conjunto

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Vamos a comprobar que β es una base para $M_{2\times 2}$

1. Checaremos independencia lineal, en este caso la combinación lineal

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 & c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_3 & c_3 \\ c_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_4 & c_4 \\ c_4 & c_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 & c_2 + c_3 + c_4 \\ c_3 + c_4 & c_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solución al sistema

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \\ c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \\ c_3 + c_4 &= 0 \\ c_4 &= 0 \end{aligned}$$

es $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Por lo tanto los vectores son linealmente independientes

2. Checaremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] &= c_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 & c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_3 & c_3 \\ c_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_4 & c_4 \\ c_4 & c_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 & c_2 + c_3 + c_4 \\ c_3 + c_4 & c_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que si

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 & c_2 + c_3 + c_4 \\ c_3 + c_4 & c_4 \end{pmatrix}$$

implican que

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= a \\ c_2 + c_3 + c_4 &= b \\ c_3 + c_4 &= c \\ c_4 &= d \end{aligned}$$

cuya solución es $c_4 = d,\ c_3 = c - d,\ c_2 = b - c,\ c_1 = a - b$

de manera que

$$\mathcal{L}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = M_{2\times 2}$$

por lo tanto β es una base para $M_{2\times 2}$