Dimensión

Definición 1. *Si el espacio vectorial V posee una base formada por un número finito de vectores, se dice que V es de dimensión finita. Caso contrario se dice que V es de dimensión infinita*

Definición 2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Se define la dimensión de V como el número de vectores en alguna (y por tanto en cualquiera) base de V.*

Ejercicio Suponga que $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base del espacio vectorial V entonces $\mathcal{L}(\beta) = V$. Ahora considere el conjunto

$$S = \{v_1, v_2, ..., v_n, v_m\}$$

con $m > n$. Pruebe que S es linealmente dependiente

Solución Como β es base de V, se tiene que la combinación lineal

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$$

se cumple cuando $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Ahora como $v_m \in V$ y β es base de V, entonces

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = v_m$$

es decir existen escalares $c_1, c_2, ..., c_n$ tal que $v_m \in \mathcal{L}(v_1, ..., v_n)$. Por lo que al considerar la combinación lineal

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n - (1)v_m = 0$$

se tiene que al menos uno de los $c_i \neq 0$ a saber $c_m = -1$, por lo que el conjunto S es linealmente dependiente.

Proposición 1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualesquiera dos bases β_1, β_2 de V, tienen el mismo número de vectores*

Demostración. Sean $\beta_1 = \{v_1, ..., v_n\}$, $\beta_2 = \{u_1, ..., u_m\}$ dos bases de V. Por una parte se tiene que $L(\beta_1) = V$ y β_2 es un conjunto linealmente independiente de vectores de V, según los resultados anteriores $m \leq n$. Por otra parte $L(\beta_2) = V$ y β_1 es un conjunto linealmente independiente de vectores de V, según los resultados anteriores $n \leq m$. Entonces $m = n$ □

Notación : Se escribira $\dim V$ para denotar la dimensión del espacio vectorial de dimensión finita V

Lema 1. *Sea $S = \{v_1, ..., v_n\}$ un conjunto de generadores del espacio vectorial V, supóngase que existe v_j $1 \leq j \leq n$ tal que puede escribirse como combinación lineal de los n-1 vectores restantes. Entonces*

$$L(S - \{v_j\}) = L(S)$$

donde $S - \{v_j\} = \{v \in S \mid v \neq v_j\}$

Demostración. Tenemos que la contención $L(S - \{v_j\}) \subset L(S)$ es clara. Veremos entonces que se cumple $L(S) \subset L(S - \{v_j\})$.
Sea $v \in L(S)$ existen escalares $c_1, ..., c_n$ tales que

$$v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$$

según la hipótesis, existen escalares $d_1, ..., d_n$ tales que

$$v_j = d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n$$

al sustituir esto en la expresión anterior se tiene

$$v = c_1 v_1 + \cdots + d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n + c_n v_n$$

$$= (c_1 + d_1) v_1 + \cdots + (c_n + d_n) v_n$$

esta última expresión es una combinación lineal de los n-1 vectores $v_1, v_2, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_n$. Entonces $v \in L(S - \{v_j\})$ □

Lema 2. *Sea S un subconjunto linealmente independiente del espacio vectorial V. Supóngase que el vector $v \in V$ no pertenece al espacio generado por S (esto es $v \notin L(S)$), entonces el conjunto $S' = S \bigcup \{v\}$ es linealmente independiente*

Demostración. Sean $u_1, ..., u_k$ vectores de S. Considérese la combinación lineal

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_k u_k + c_{k+1} v = 0$$

Afirmamos que $c_{k+1} = 0$. En efecto, si $c_{k+1} \neq 0$ se podría escribir

$$v = \left(-\frac{c_1}{c_{k+1}}\right) u_1 + \left(-\frac{c_2}{c_{k+1}}\right) u_2 + \cdots + \left(-\frac{c_k}{c_{k+1}}\right) u_k$$

lo que contradice la hipótesis de que $v \notin L(S)$.
Entonces la expresión queda

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_k u_k = 0$$

Como S es linealmente independiente, se concluye que $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$, lo que prueba que S' es linealmente independiente □

Teorema 1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualquier conjunto de generadores de V contiene una base para V*

Demostración. Sea $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ un conjunto de generadores de V. Si S es linealmente independiente, entonces, S es una base de V. Caso contrario, según los resultados anteriores existe un vector $v_j, \quad 1 \leq j \leq k$ que se puede escribir como combinación lineal de los k-1 vectores restantes. Sea $S_1 = S - \{v_j\}$. Por lema 1, $L(S_1) = V$. Si S_1 es linealmente independiente, S_1 es la base requerida. Caso contrario repitase el proceso. □

Teorema 2. *Si $\{u_1, ..., u_m\}$ es un conjunto linealmente independiente de V, existen vectores $w_1, w_2, ..., w_{n-m}$ ($n = \dim V$) tales que $\beta = \{u_1, u_2, ..., u_m, w_1, w_2, ..., w_{n-m}\}$ es una base de V.*

Demostración. Sea $S = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$. Escríbase $V_0 = L(S)$. Si $V_0 = V$, entonces S es la base requerida (pues S es linealmente independiente y $L(S) = V$). Caso contrario (o sea $L(S)$ es un subespacio propio de V), existe un vector $w_1 \in V$ tal que $w_1 \notin L(S)$. Según lema 2, el conjunto $S_1 = S \bigcup \{w_1\}$ es linealmente independiente. Escríbase $V_1 = L(S_1)$. Si $V_1 = V$, S_1 es la base requerida β. Caso contrario continuese el proceso. Al continuar este proceso de adjunción de vectores de V al conjunto S, se llegara a lo más en $n - m$ etapas, a un conjunto linealmente independiente que genere V. Ésta será la base β procurada □

Corolario 1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Dígase que* $\dim V = n$. *Entonces*
(1) Cualquier conjnuto de n vectores linealmente independientes es una base de V.
(2) Cualquier conjunto de n vectores que genera V, es una base de V.

Demostración. (1) Según los resultados anteriores, todo conjunto linealmente independiente puede ser extendido para completar una base. Pero por una parte, V tiene n vectores en cualquier base y, por otra, el conjunto linealmente independiente del que se parte tiene n vectores. Este debe ser una base de V.
(2) Según los resultados anteriores, de cualquier conjunto de vectores que generan a V se puede extraer una base. Por el mismo argumento que en (1), el conjunto formado por n vectores que genera a V debe ser una base de V. □

Teorema 3. *Sea W un subespacio vectorial de dimensión finita V. Entonces W es de dimensión finita y* $\dim W \leq \dim V$

Demostración. El caso $W = \{0\}$ es obvio, pues $\dim V \geq 0$. Sea $w_1 \in W$. Si $L(w_1) = W$ entonces $\{w_1\}$ es una base de W y por tanto W es de dimensión finita que puede completarse para formar una base de V. En tal caso se tiene que $\dim W \leq \dim V$. Si $L(w_1) \neq W$, tómese $w_2 \in W$, $w_2 \notin L(w_1)$. El conjunto $\{w_1, w_2\}$ es linealmente independiente. Si $L(w_1, w_2) = W$ entonces $\{w_1, w_2\}$ es una base de W y entonces W es de dimensión finita que se puede completar para formar una base de V. En este caso, $\dim W \leq \dim V$. Continúese este proceso tantas veces como sea necesario hasta obtener una base de W. Obsérvese que no se puede tener más de $\dim V$ etapas. Esto muestra que W es de dimensión finita. Con la base obtenida de W, complétese hasta formar una base de V. Entonces $\dim W \leq \dim V$ □

Ejemplo Compruebe que los únicos subespacios vectoriales no triviales de $\mathbb{R}^3$ son:

1. Rectas por el origen
2. Planos por el origen

Solución Si W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ entonces $dim\ W = 0, 1, 2, 3$

1. Si $dim\ W = 0$ entonces $W = \{0\}$ el subespacio trivial de $\mathbb{R}^3$.
2. Si $dim\ W = 3$ entonces $W = \mathbb{R}^3$ el subespacio trivial.
3. Si $dim\ W = 1$ entonces W contiene un vector $v = (a, b, c) \in W$ con $a, b, c \neq 0$ simultaneamente. Se tiene entonces que

   $$\mathcal{L}(v) = c_1 v = c_1(a, b, c) = (c_1 \cdot a, c_1 \cdot b, c_1 \cdot c) \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

   es decir una recta al origen.
4. Si $dim\ W = 2$ entonces W contiene dos vectores $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$ por lo que

   $$\mathcal{L}(v_1, v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(a_1, b_1, c_1) + \beta(a_2, b_2, c_2)$$

   esto nos conduce al sistema

   $$\begin{aligned} x &= \alpha a_1 + \beta a_2 \\ y &= \alpha b_1 + \beta b_2 \\ z &= \alpha c_1 + \beta c_2 \end{aligned}$$

de este sistema se desprende la expresión

$$(b_1c_2 - b_2c_1)x + (c_1a_2 - c_2a_1)y + (b_2a_1 - b_1a_2)z = 0$$

un plano al origen.