Dependencia e Independencia Lineal

Definición 1. *Sea V un espacio vectorial y sean $v_1, v_2, ..., v_n$ n vectores de V. Se dice que éstos valores son linealmente independientes si se cumple*

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0, \qquad c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$$

caso contrario, se dira que tales valores son linealmente dependientes, es decir si existen escalares $c_1, c_2, ..., c_n$ con al menos uno de ellos diferente de cero tal que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$$

Ejemplo Sean los vectores $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (-1, 2, 5)$ y $v_3 = (0, 1, 4)$ en $\mathbb{R}^3$, para verificar que son linealmente independientes, debe ocurrir

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(-1, 2, 5) + c_3(0, 1, 4) = 0$$

es decir

$$\begin{gathered} c_1 - c_2 = 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + 5c_2 + 4c_3 \end{gathered}$$

que es un sistema 3×3 cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

donde $\det A = 13 \neq 0$. Por lo tanto el sistema tiene solución $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Teorema 1. *Los n vectores $v_1, ..., v_n$ del espacio vectorial V son linealmente dependientes si, y solo si al menos uno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los $n - 1$ vectores resultantes.*

Demostración. Si los vectores son linealmente independientes entonces existe $c_i \neq 0$ tal que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$$

$$\Rightarrow \; c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = -c_iv_i$$
$$\Rightarrow \; -\frac{c_1}{c_i}v_1 - \frac{c_2}{c_i}v_2 + ... \frac{-c_n}{c_i}v_n = v_i$$

por lo que v_i es una combinación lineal de los restantes
Reciprocamente, supóngase que al menos uno de los n vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ puede escribirse como combinación lineal de los $n - 1$ vectores restantes.
Supóngase que v_1 es tal que

$$v_1 = d_2v_2 + \cdots + d_nv_n$$

que se puede escribir

$$v_1 - d_2v_2 - \cdots - d_nv_n = 0$$

tomando $c_1 = 1 \neq 0$ y $c_i = -d_i$ con $i = 2, 3, ..., n$, o se que los vectores $v_1, ..., v_n$ son linealmente independientes □

Ejemplo Dado el polinomio $P(x) = -2 - x + x^2$, vamos acomprobar que es combinación lineal de $P_1(x) = -x + x^2$ y $P_2(x) = 1 + x$
En este caso se tien que

$$P(x) = c_1P_1(x) + P_2(x) \;\Rightarrow\; -2 - x + x^2 = c_1[-x + x^2] + c_2[1 + x]$$

de lo anterior se desprende

$$c_1 = -1, \quad c_2 = -2$$

por lo que

$$P(x) = (-1)[-x + x^2] + (-2)[1 + x]$$

Ejemplo Dado el conjunto $v_1 = e^x$, $v_2 = \operatorname{sen}(x)$, $v_3 = \cos(x)$ pertenecientes al espacio vectorial de las funciones continuas, pruebe que son linealmente independientes

Demostración. Al formar la combinación lineal

$$c_1e^x + c_2 \operatorname{sen}(x) + c_3 \cos(x)$$

si es cero para cualquier valor de x ponemos $x = 0,\ x = \pi,\ x = \dfrac{\pi}{2}$ y obtenemos

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 = 0 \\ c_1e^{\pi} - c_3 = 0 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $-1-e^{\pi} \neq 0$ por lo tanto el sistema tiene solo la solución trivial $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ y entonces se concluye que los vectores son linealmente independientes □