

Combinaciones lineales

Definición 1. Sea V un espacio vectorial. Sean v_1, \dots, v_n vectores de V . Se dice que el vector $v \in V$ es una combinación lineal de los vectores v_1, \dots, v_n , si existen escalares c_1, \dots, c_n tales que

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$$

Ejemplo El vector $(14, 12, 2)$ en \mathbb{R}^3 es combinación lineal de los vectores $(1, 2, -1)$ y $(3, 2, 1)$ puesto que

$$(14, 12, 2) = 2(1, 2, -1) + 4(3, 2, 1)$$

Ejemplo El vector v del conjunto de matrices de 2×2 dado por

$$v = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

es combinación lineal de los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ya que

$$3v_1 - 2v_2 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-6 & 0-4 \\ 6-4 & -3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = v$$

Se va a considerar ahora el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de los elementos de un conjunto S .

Subespacios Vectoriales Generados por un Conjunto de Vectores

Al conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de los elementos de un subconjunto $S \subset V$ lo denotamos $\mathcal{L}(S)$. Entonces

$$\mathcal{L}(S) = \{c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n \mid c_i \in \mathbb{R}, v_i \in S, i = 1, \dots, k, k \in \mathbb{N}\}$$

Teorema 1. Sea V un espacio vectorial, y sean v_1, v_2, \dots, v_n , n vectores de V . Entonces el conjunto

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n \mid c_i \in \mathbb{R}, v_i \in S, i = 1, \dots, k, k \in \mathbb{N}\}$$

es un subespacio de V

Demostración. Sean $x, y \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Entonces existen c_1, \dots, c_n y d_1, \dots, d_n en \mathbb{R} tal que

$$\begin{aligned} x &= c_1v_1 + \dots + c_nv_n \\ y &= d_1v_1 + \dots + d_nv_n \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$x + y = c_1v_1 + \dots + c_nv_n + d_1v_1 + \dots + d_nv_n = (c_1 + d_1)v_1 + \dots + (c_n + d_n)v_n$$

lo que demuestra que $x + y \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$

En forma similar, si $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\lambda x = \lambda(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = (\lambda c_1) v_1 + \dots + (\lambda c_1) v_1 + \dots + (\lambda c_n) v_n$$

lo que prueba que $\lambda x \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Entonces, $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ es un subespacio de V .

Dado que

$$v_i = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + 0 \cdot v_n$$

entonces los vectores $v_i \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ □

Sea W un subespacio de V que contiene a v_1, \dots, v_n y sea $x = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Por ser W un subespacio de V se tiene que $x \in W$. Es decir $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n) \subset W$. Esto demuestra que $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ es el menor de los subespacios de V que contiene a v_1, \dots, v_n

Definición 2. Sea V un espacio vectorial y sean v_1, \dots, v_n vectores de V . Al subespacio $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ se le llama subespacio generado por los vectores v_1, \dots, v_n

Ejemplo Sean $v_1 = (1, 3, -1)$ y $v_2 = (2, 1, 3)$ dos vectores de \mathbb{R}^3 se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v_1, v_2) &= \{c_1(1, 3, -1) + c_2(2, 1, 3) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(c_1 + 2c_2, 3c_1 + c_2, -c_1 + 3c_2) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \mid x = (c_1 + 2c_2), y = 3c_1 + c_2, z = -c_1 + 3c_2), c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

En otros términos, se tiene de la última expresión

$$\begin{aligned} x &= c_1 + 2c_2 \\ y &= 3c_1 + c_2 \\ z &= -c_1 + 3c_2 \end{aligned}$$

que puede contemplarse como un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas c_1, c_2 el cual tiene solución. Ahora bien al aplicarle el método de eliminación Gaussiana

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & 1 & y \\ -1 & 3 & z \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -5 & y - 3x \\ 0 & 0 & -2x + y + z \end{bmatrix}$$

Entonces el hecho de la existencia de soluciones del sistema es equivalente a que $-2x + y + z = 0$. Es decir, el vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de $v_1 = (1, 3, -1)$ y $v_2 = (2, 1, 3)$ si, y solo si $-2x + y + z = 0$. Por lo tanto, el subespacio $\mathcal{L}(v_1, v_2)$ puede ser descrito como

$$\mathcal{L}(v_1, v_2) = \{(x, y, z) \mid -2x + y + z = 0\}$$

que es un subespacio de \mathbb{R}^3 que representa geoméricamente un plano que pasa por el origen