Subespacios Vectoriales

Sea V un espacio vectorial y considérese un subconjunto W de V (es decir, el conjunto W es tal que todo elemento de W es elemento de V). W hereda de manera natural, las operaciones de espacio vectorial que estaban definidas en V. Se tiene asi, un conjunto W en donde existen operaciones de suma y producto por escalares, ¿Es W un espacio vectorial?

Ejemplo Sea V el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ formado por aquellos vectores (x, y) que tiene su segunda coordenada positiva (geométricamente W corresponde al semiplano superior del plano XY). Es decir,

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{R},\ x > 0\}$$

En este caso las operaciones definidas en W son las que estan definidas en $\mathbb{R}^2$, es decir

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Si consideramos el escalar $\lambda < 0$ el vector $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ no pertenece a W, pues siendo $y > 0$, se tendría $\lambda y < 0$. En consecuencia el subconjunto W de V no es un espacio vectorial.

Ejemplo Consideremos el subconjunto W de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{R},\ y = 2x\}$$

En este caso se puede comprobar que W si es un espacio vectorial con las operaciones usuales de $\mathbb{R}^2$

1. $0 \in W$ pues $(0, 0)$ es tal que $y = 0 = 2(0) = 2x$
2. Si $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in W$ entonces $y_1 = 2x_1$ y $y_2 = 2x_2$ por lo que

   $$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

   de manera que

   $$2(x_1 + x_2) = 2x_1 + 2x_2 = y_1 + y_2$$

   por lo tanto $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W$
3. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ y$(x_1, y_1) \in \mathbb{R}$ se tiene

   $$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

   de manera que

   $$\lambda y_1 = \lambda 2x_1 = 2\lambda x_1$$

   por lo tanto $\lambda(x_1, y_1) \in W$

Teorema 1. *Sea V un espacio vectorialy W un subconjunto de V. Entonces, W es un subespacio de V si y solo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:*
(a) $0 \in W$
(b) $x + y \in W$ *siempre que* $x \in W$ *y* $y \in W$
(c) $ax \in W$ *siempre que* $a \in \mathbb{R}$ *y* $x \in W$.

Demostración. Si W es un subespacio de V, entonces W es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalares definidas en V. Se cumplen entonces (b) y (c), y existe $0' \in W$ tal que $x + 0' = x \;\forall\; x \in W$. Përo tambien $x + 0 = x$ y por tanto $0' = 0$ en consecuencia se satisface (a).
Reciprocamente si se satisfacen las condiciones (a), (b) y (c), y por ser subconjunto de V se satisfacen las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva tanto para la suma como para el producto por escalar, falta ver la propiedad del inverso aditivo.
Si $x \in W$, entonces $(-1)x \;\in\; W$ por (c), y $-x = (-1)x$. De aquí que W sea subespacio de V □

Observación Todo espacio vectorial V tiene al menos dos subespacios, a saber el subespacio [0] y V mismo. A éstos se les llamará **subespacios triviales de V**.

Ejemplo Considérese el conjunto L de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$$

en donde a y b son dos números reales fijos no ambos cero.
Afirmamos que L es un subespacio de $\mathbb{R}^2$

Demostración. En efecto, sean $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$ dos vectores de L. Se tiene entonces

$$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in L$$

pues

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) = ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2 = 0$$

por lo tanto $u + v \in L$
Ahora bien

$$\lambda u = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

de donde

$$a(\lambda x_1) + b(\lambda x_2) = \lambda(ax_1 + bx_2) = 0$$

por lo tanto $\lambda u \in L$. □

Teorema 2. *Sea W un subespacio no trivial de* $\mathbb{R}^2$*. Entonces W es de la forma*

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$$

donde a y b son números reales no ambos nulos

Demostración. Sea (x_0, y_0) un vector no nulo de W. Supóngase que $x_0 \neq 0$. Y considérese el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y_0 x - x_0 y = 0\}$$

Ya hemos probado que L es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Vamos a mostrar que $L = W$, primero mostrando que
$L \subset W$
Sea $(x_1, y_1) \in L$. Entonces $y_0x_1 - x_0y_1 = 0$ o bien $y_1 = \dfrac{y_0x_1}{x_0}$. Sea $\lambda = \dfrac{x_1}{x_0} \in \mathbb{R}$ y observamos que

$$(x_1, y_1) = \frac{x_1}{x_0}(x_0, y_0) = \lambda(x_0, y_0)$$

Pero $(x_0, y_0) \in W$ y W es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Entonces $(x_1, y_1) \in W$ por lo que $L \subset W$
$W \subset L$
Supongamos que $W \not\subset L$. Existiria $(x_2, y_2) \in W$ tal que $(x_2, y_2) \notin L$. Es decir $(x_2, y_2) \in W$ y $y_0x_2 - x_0y_2 \neq 0$. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cualquiera, y considérese el sistema de dos ecuaciones con dos incognitas λ y μ

$$\begin{aligned} y_0\lambda + y_2\mu &= y \\ x_0\lambda + x_2\mu &= x \end{aligned}$$

El determinante del sistema es $y_0x_2 - x_0y_2 \neq 0$ por lo que existe una única solución $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ tal que

$$\begin{aligned} y_0\tilde{\lambda} + y_2\tilde{\mu} &= y \\ x_0\tilde{\lambda} + x_2\tilde{\mu} &= x \end{aligned}$$

pero entonces

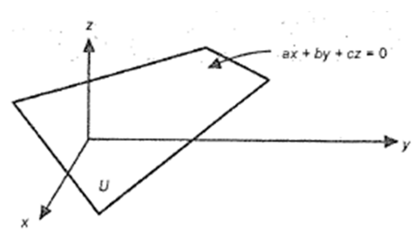
$$(x, y) = (x_0\tilde{\lambda} + x_2\tilde{\mu}, y_0\tilde{\lambda} + y_2\tilde{\mu}) = \tilde{\lambda}(x_0, y_0) + \tilde{\mu}(x_2, y_2)$$

tanto (x_0, y_0) como (x_2, y_2) son vectores de W. Siendo éste un subespacio de $\mathbb{R}^2$, concluimos que $(x, y) \in W$. Pero (x, y) era un vector arbitrario de $\mathbb{R}^2$. Por tanto, $W = \mathbb{R}^2$., lo que contradice la hipótesis de que W es es un subespacio no trivial de $\mathbb{R}^2$. Entonces $W = L$. Tómese $a = y_0,\ b = x_0$ del teorema anterior $\square$

Ejemplo Considérese el subconjunto U de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$U = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz = 0\}$$

en donde a, b y c son tres números reales fijos no todos iguales a cero.



Comprobarempos que es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

1. $(0, 0, 0) \in U$ pues $a(0) + b(0) + c(0) = 0$
2. Si $(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2) \in U$ entonces

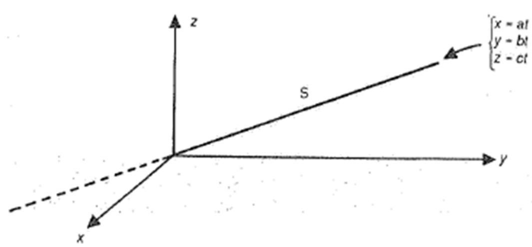
$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 0 \quad y \quad ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$$

de manera que
$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
por lo que
$$a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2) = ax_1+ax_2+by_1+by_2+cz_1+cz_2 = ax_1+by_1+cz_1+ax_2+by_2+cz_2 = 0+0 = 0$$
y entonces
$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in U$$

3. Para un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x_1, y_1, z_1) \in U$ se tiene
$$\lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$$
por lo que
$$a(\lambda x_1) + b(\lambda y_1) + c(\lambda z_1) = \lambda(ax_1 + by_1 + cz_1) = \lambda(0) = 0$$
entonces
$$\lambda(x_1, y_1, z_1) \in U$$

Concluimos que U es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Considérese el subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ dado por
$$S = \{(x, y, z) \mid x = at,\ y = bt,\ z = ct,\ t \in \mathbb{R}\}$$
en donde a, b y c son tres números reales fijos no todos iguales a cero.



Comprobarempos que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

1. $(0, 0, 0) \in S$ pues $0 = x = a(0),\ 0 = y = b(0),\ 0 = z = c(0)$ con $t = 0 \in \mathbb{R}$
2. Si $(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2) \in S$ entonces
$$x_1 = at,\ y_1 = bt,\ z_1 = ct \quad y \quad x_2 = at_1,\ y_2 = bt_1,\ z_1 = ct_1$$
de manera que
$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
por lo que
$$x_1 + x_2 = at + at_1 = a(t + t_1),\ y_1 + y_2 = bt + bt_1 = b(t + t_1),\ z_1 + z_2 = ct + ct_1 = c(t + t_1)$$
donde $t + t_1 \in \mathbb{R}$ y entonces
$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in S$$

3. Para un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x_1, y_1, z_1) \in S$ se tiene

$$\lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$$

   por lo que

$$\lambda x_1 = \lambda at = a(\lambda t),\ \lambda y_1 = \lambda bt = b(\lambda t),\ \lambda z_1 = \lambda ct = c(\lambda t) \quad \lambda t \in \mathbb{R}$$

   entonces

$$\lambda(x_1, y_1, z_1) \in S$$

Concluimos que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$