Teorema 1. *Sean X y Y conjuntos cualesquiera y sea $f : X \to Y$. Entonces f es inyectiva si y sólo si para cualquiera subconjuntos $A_1,\ A_2$ de X,*

$$f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$$

Demostración. ($\Rightarrow$)
Supongamos que f es inyectiva y sean $A_1,\ A_2 \subseteq X$, sabemos que $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A] \cap f[A_2]$. Para ver que se cumple la otra condición se tiene

$$\begin{aligned}
y \in f[A_1] \cap f[A_2] &\Rightarrow\ y \in f[A_1] \wedge y \in f[A_2] \\
&\Rightarrow\ \exists a_1 \in A_1 \ \ni\ f(a_1) = y\ \wedge\ \exists a_2 \in A_2 \ \ni\ f(a_2) = y \\
&\Rightarrow\ f(a_1) = f(a_2) \\
&\overset{f\ inyectiva}{\Rightarrow}\ a_1 = a_2 \\
&\Rightarrow\ a_1 \in A_2 \\
&\Rightarrow\ a_1 \in A_1 \cap A_2 \wedge y = f[a_1] \in f[A_1 \cap A_2]
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$)
Supongamos ahora que cualquiera subconjuntos $A_1, A_2 \subseteq X$

$$f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$$

Para ver que f es inyectiva, consideramos $x, y \in X$ tal que $f(x) = f(y)$ y definimos $A_1 = \{x\}$ y $A_2 = \{y\}$ de forma que

$$\begin{aligned}
f[A_1] \cap f[A_2] = f[\{x\}] \cap f[\{y\}] &= \{f(x)\} \cap \{f(y)\} \\
&\overset{f(x)=f(y)}{=} \{f(x)\} \cap \{f(y)\} \\
&= \{f(x)\}
\end{aligned}$$

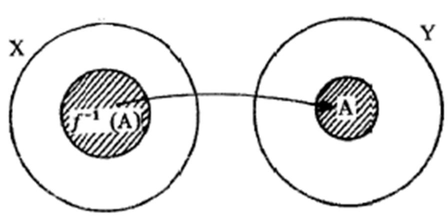
En particular

$$f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2] \neq \emptyset \ \Rightarrow\ A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \{x\} \cap \{y\} \neq \emptyset \ \Rightarrow\ x = y$$

□

Imagenes inversas de funciones

Sean $f : X \to Y$ y A una parte del codominio Y. Imagen inversa ó preimagen del subconjunto $A \subset Y$, es el conjunto de los elementos del dominio cuyas imagenes pertenecen a A



$$f^{-1}(A) = \{x \in X | f(x) \in A\}$$

las siguientes afirmaciones son claras

$$Si \quad x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(x) \in A$$

$$Si \quad f(x) \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$$

Es decir, un elemento del dominio pertenece a la preimagen de A, si y solo si su imagen pertenece a A.

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Determine las preimagenes de los siguientes subconjuntos del codominio $[4, 9]$

Solución Para el conjunto $[4, 9]$ se tiene que

$$f^{-1}[4, 9] = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in [4, 9]\}$$

Ahora bien

$$f(x) \in [4, 9] \Leftrightarrow x^2 \in [4, 9] \Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 9 \Leftrightarrow 2 \leq |x| \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$2 \leq x \leq 3 \quad \text{Ó} \quad 2 \leq -x \leq 3 \Leftrightarrow x \in [2, 3] \quad \text{Ó} \quad x \in [-3, -2]$$

resulta entonces que

$$f^{-1}[4, 9] = [-3, -2] \bigcup [2, 3]$$

Lema 1. *Sean X y Y conjuntos cualesquiera y sea $f : X \to Y$. Se tiene lo siguiente*

a) $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$

b) Si $B_1, B_2 \subseteq Y$, entonces $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$.

c) Si $B_1, B_2 \subseteq Y$, entonces $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$.

d) Si $B \subseteq Y$, entonces

$$X - f^{-1}[B] = f^{-1}[Y - B]$$

Demostración. a) Supongamos que $f^{-1}[\emptyset] \neq \emptyset$ esto implica que $\exists\, x \in X$ tal que $f(x) \in \emptyset$ (absurdo). Por lo tanto

$$f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$$

b) $x \in f^{-1}(B_1 \bigcup B_2) \Leftrightarrow f(x) \in (B_1 \bigcup B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \quad \text{Ó} \quad f(x) \in B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \quad ó \quad x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \bigcup f^{-1}(B_2)$

c) $x \in f^{-1}(B_1 \bigcap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in (B_1 \bigcap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \quad y \quad f(x) \in A_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \quad y \quad x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \bigcap f^{-1}(B_2)$

d) Sea $B \subseteq Y$, entonces

$$x \in X - f^{-1}[B] \;\Leftrightarrow\; x \in X \;\wedge\; x \notin f^{-1}[B] \;\Leftrightarrow\; x \in X \;\wedge\; f(x) \notin B \;\Leftrightarrow\; f(x) \in Y \;\wedge\; f(x) \notin B$$

$$\Leftrightarrow\; f(x) \in Y - B \;\Leftrightarrow\; x \in f^{-1}[Y - B]$$

□

Lema 2. *Sean X, Y conjuntos y sea $f : X \to Y$. Se tiene lo siguiente*

a) Para cualquier $A \subseteq X$, se tiene que $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$

b) Para cualquier $B \subseteq Y$, se tiene que $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$

c) Si $A \subseteq X$, entonces $f[X] - f[A] \subseteq f[X - A]$

Demostración. a) Sea $A \subseteq X$. Se tiene $x \in A \;\Rightarrow\; f(x) \in f[A]$, donde $f[A] \subseteq Y$ por lo que

$$x \in f^{-1}[f[A]] \quad \therefore \quad A \subseteq f^{-1}[f[A]]$$

b) Sea $B \subseteq Y$. Sea $f(x) \in f[f^{-1}[B]] \;\Rightarrow\; x \in f^{-1}[B] \;\Rightarrow\; f(x) \in B$

c) Sea $A \subseteq X$. Sea $f(x) \in f[X] - f[A] \;\Rightarrow\; f(x) \in f[X] \;\wedge\; f(x) \notin f[A] \;\Rightarrow\; x \in X \;\wedge\; x \notin A \;\Rightarrow\; x \in X - A \;\Rightarrow\; f(x) \in f(X - A)$

□

Proposición 1. *Sea $f : X \to Y$. Se tiene que f es inyectiva si y sólo si*

$$\forall\, a \in A,\; A \subseteq X \;\Rightarrow\; f^{-1}[f[A]] = A$$

Demostración. $(\Rightarrow)$
Supongamos que f es inyectiva y queremos probar que $f^{-1}[f(A)] = A$ para esto
$(\subseteq$

$$\begin{aligned} x \in A \;&\Rightarrow\; f(x) \in f[A] \\ &\Rightarrow\; x \in f^{-1}[f[A]] \end{aligned}$$

por lo tanto $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$
$(\supseteq)$
Supongamos que existe $y \in f^{-1}[f[A]] \;\wedge\; y \notin A$, pero como $\exists\, x \in A$ tal que $f(x) = f(y)$ resulta f no inyectiva, lo cual es absurdo. Luego se tiene $f^{-1}[f[A]] \subset A$.
$(\Leftarrow)$
Si existen $x \neq y$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces considerando $A = \{x\}$ se tiene

$$A = \{x\} \neq \{x, y\} \subset f^{-1}[f[A]]$$

□

Proposición 2. *La función f es sobre si y sólo si para cualquier subconjunto B de Y*

$$f[f^{-1}[B]] = B$$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que f es sobre. Sea $B \subseteq Y$. Queremos probar que $f[f^{-1}[B]] = B$. Sabemos que $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$. falta ver $B \subseteq f[f^{-1}[B]]$. Para esto sea $y \in B$. Como f es sobre existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$; además, como $y \in B$, $f(x) \in B$, de donde $x \in f^{-1}[B]$. Así $y = f(x)$ con $x \in f^{-1}[B]$, por lo cual $y \in f[f^{-1}[B]]$.
$(\Leftarrow)$ Supongamos ahora que para todo subconjunto B de Y, $f[f^{-1}[B]] = B$. En particular, tenemos que $Y = f[f^{-1}[Y]]$. Por definición $f^{-1}[Y] = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ y, como $f : X \to Y$, $\{x \in X \mid f(x) \in Y\} = X$. Así, $f^{-1}[Y] = X$. Como $Y = f[f^{-1}[Y]]$, tenemos que $Y = f[X]$, es decir, $Im_f = Y$ y f es sobre □