Cálculo combinatorio

Los números naturales aparecen en un principio como una herramienta para contar los elementos de algunos conjuntos (los finitos)

Ejemplo Para saber si hay el mismo número de personas que compraron boleto para un espectáculo en un teatro y de asientos en el teatro no necesitamos contar a los espectadores y a los asientos en el teatro, basta con sentar a todos los espectadores y ver si sobran o faltan asientos.

Este ejemplo se puede generalizar a la siguiente definición.

Definición 1. *Sean A y B conjuntos decimos que A y B tienen la misma cardinalidad o mismo número cardinal o mismo número de elementos si y sólo si existe una función biyectiva* $f : A \to B$.

La idea es que la función biyectiva pone a todos los elementos de A en correspondencia uno a uno con todos los elementos de B. Así, para cada elemento de A hay uno de B y viceversa, por lo que claramente tienen el mismo número de elementos.

Definición 2. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *definimos el segmento inicial con* n *elementos como el conjunto* I_n *tal que:*

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \emptyset \\
I_1 &= \{1\} \\
I_2 &= \{1, 2\} \\
I_3 &= \{1, 2, 3\} \\
&\vdots \\
I_n &= \{1, 2, 3, ..., n\}
\end{aligned}
$$

Decimos que un conjunto A es finito, si existen $n \in \mathbb{N}$ y $f : A \to I_n$ tal que f es biyectiva. Un conjunto infinito es uno que no es finito.
La idea de contar los elementos de un conjunto finito A es establecer una biyección f entre A y algún segmento inicial I_n, con $n \in \mathbb{N}^+$, entonces podemos enlistar los elementos de A enumerándolos así

$$A = \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$$

formalizando el proceso de contar que se ha usado desde hace siglos. Se acostumbra denotar por a_i a $f(i)$, de modo que podemos escribir

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

donde $a_i \neq a_j$ siempre que $i \neq j$

Lema 1. *Se cumple lo siguiente*

I) *Para cualquier* $n \in \mathbb{N}$, $I_{s(n)} = I_n \cup \{s(n)\}$

II) *Para cualquiera* $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$, $I_{m+n} = I_m \cup \{m + 1, m + 2, ..., m + n\}$

III) *Para cualquiera* $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$, $I_m \cap \{m + 1, m + 2, ..., m + n\} = \emptyset$

Demostración. I) Procedemos por inducción y definiendo

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid I_{s(n)} = I_n \cup \{s(n)\}\}$$

a) Para ver que $0 \in A$ tenemos que

$$I_{s(0)} = I_1 = \{1\} = \emptyset \cup \{1\} = I_0 \cup \{s(0)\}$$

b) Suponemos que $n \in A$, esto es

$$I_{s(n)} = I_n \cup \{s(n)\}$$

c) Vamos a probar que $s(s(n)) \in A$. Para esto tenemos que

$$\begin{aligned} I_{s(s(n))} &= \{1, 2, 3, ..., n, s(n), s(s(n))\} \\ &= \{1, 2, ..., n, s(n)\} \cup \{s(s(n))\} \\ &= [\{1, 2, ..., n\} \cup \{s(n)\}] \cup \{s(s(n))\} \\ &= I_{s(n)} \cup \{s(s(n))\} \end{aligned}$$

por lo tanto $s(s(n)) \in A$

II) Procedemos por inducción fijando $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ y definiendo

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid I_{m+n} = I_m \cup \{m+1, m+2, ..., m+n\}\}$$

a) Para ver que $1 \in A$ tenemos que

$$I_{m+1} = I_{s(m)} = \{1, 2, ..., m, m+1\} = \{1, 2, ..., m\} \cup \{m+1\} = I_m \cup \{m+1\}$$

b) Suponemos que $n \in A$, esto es

$$I_{m+n} = I_m \cup \{m+1, m+2, ..., m+n\}$$

c) Vamos a probar que $s(n) \in A$. Para esto tenemos que

$$\begin{aligned} I_{m+s(n)} = I_{s(m+n)} &= I_{m+n} \cup \{s(m+n)\} \\ &= I_m \cup \{m+1, m+2, ..., m+n\} \cup \{s(m+n)\} \\ &= I_m \cup \{m+1, m+2, ..., m+n, s(m+n)\} \\ &= I_m \cup \{m+1, m+2, ..., m+n, m+s(n)\} \end{aligned}$$

por lo tanto $s(n) \in A$

III) Procedemos por inducción fijando $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ y definiendo

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid I_m \cap \{m+1, m+2, ..., m+n\}\} = \emptyset$$

a) Para ver que $1 \in A$ tenemos que

$$I_m = \{1, 2, ..., m\} \cap \{m+1\} = \emptyset$$

b) Suponemos que $n \in A$, esto es

$$I_m \cap \{m+1, m+2, ..., m+n\} = \emptyset$$

c) Vamos a probar que $s(n) \in A$. Para esto tenemos que

$$\begin{aligned} I_m \cap \{m+1, m+2, ..., m+n\} &= \emptyset \\ I_m \cap \{s(m+n)\} &= \emptyset \\ I_m \cap [\{m+1, m+2, ..., m+n\} \cup \{s(m+n)\}] &= \emptyset \\ I_m \cap [\{m+1, m+2, ..., m+n, s(m+n)\}] &= \emptyset \\ I_m \cap [\{m+1, m+2, ..., m+n, m+s(n)\}] &= \emptyset \end{aligned}$$

por lo tanto $s(n) \in A$

$\square$

Teorema 1. *Si A y B son conjuntos finitos tales que $A \cap B = \emptyset$ entonces*

$$card\ (A \cup B) = card\ (A) + card\ (B)$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} A\ finito\ &\Rightarrow\ \exists\ m \in \mathbb{N}\ \ni\ f : I_m \to A\ es\ biyectiva \\ B\ finito\ &\Rightarrow\ \exists\ n \in \mathbb{N}\ \ni\ f : I_n \to B\ es\ biyectiva \end{aligned}$$

Veamos que hay una biyección entre $h : I_{m+n} \to A \cup B$.
Sabemos que

$$I_{m+n} = I_m \cup \{m+1, m+2, ..., m+n\}, \quad I_m \cap \{m+1, m+2, ..., m+n\} = \emptyset$$

Se define entonces la función $f : I_{m+n} \to A \cup B$ como sigue

$$h(j) = \begin{cases} f(j) & si \quad j \leq m \\ g(j-m) & si \quad j > m \end{cases}$$

La función h esta bien definida pues $j \in I_{m+n}$ quiere decir que $j \in I_m$ ó $j \in \{m+1, m+2, ..., m+n\}$.
Tenemos que h es inyectiva pues $j, k \in I_{m+n}$ tal que $j \neq k$. Tenemos que

$$\begin{aligned} j, k \leq m\ &\Rightarrow\ h(j) = f(j) \overset{f\ inyectiva}{\neq} f(k) = h(k) \quad \therefore\ h(j) \neq h(k) \\ j, k > m\ &\Rightarrow\ h(j) = g(j-m) \overset{g\ inyectiva}{\neq} g(k-m) = h(k) \quad \therefore\ h(j) \neq h(k) \end{aligned}$$

En el caso de que $j \leq m$ y $k > m$ se tiene

$$h(j) = f(j) \neq g(j-k) = h(k) \quad \therefore\ h(j) \neq h(k)$$

Ahora bien h es sobre pues

$$\begin{aligned} h(j) \in A\ Si\ j \leq m\ &\Rightarrow\ h(j) = f(j) \overset{f\ sobre}{\Rightarrow} \exists\ j' \in I_{m+n}\ \ni\ f(j') = h(j) \\ h(j) \in A\ Si\ j > m\ &\Rightarrow\ h(j) = g(j-m) \overset{g\ sobre}{\Rightarrow} \exists\ j'' \in I_{m+n}\ \ni\ g(j'') = h(j) \end{aligned}$$

$\therefore$ h es biyectiva, se tiene entonces $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$ $\square$

Corolario 1. ***Principio de la suma.*** *Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$. Supongamos que $A_1, A_2, ..., A_k$ son conjuntos finitos ajenos por pares, es decir que si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Entonces*

$$card(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k) = card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) + \cdots + card(A_k)$$

Demostración. Por inducción sobre $k \geq 2$

a) Si $k = 2$ por el resultado anterior para dos conjuntos ajenos $A_1,\ A_2$ $card(A_1 \cup A_2) = card(A_1 + card(A_2$

b) Supongamos el corolario cierto para k es decir

$$card(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k) = card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) + \cdots + card(A_k)$$

c) Como $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ entonces $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k) \cap A_{k+1} = \emptyset$ por lo que

$$\begin{aligned} card(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}) &= card([A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k] \cup A_{k+1}) \\ &= card(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k) + card(A_{k+1}) \\ &= card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) + \cdots + card(A_k) + card(A_{k+1}) \end{aligned}$$

por lo tanto el corolario es cierto para cualquier natural $k \geq 2$ □

Corolario 2. ***Principio del palomar.*** *Sea A un conjunto finito tal que $card(A) = m$ y sea $\{A_i \mid i \in I\}$ una partición de A de forma que si $i \neq j$, A_i y A_j son ajenos. Si $m > n$, entonces para algún $i \in I_n$, $card(A_i) > 1$*

|

Demostración. Sean A y $\{A_i \mid i \in I\}$ como en la hipótesis. Entonces $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$ y los elementos de $\{A_i \mid i \in I\}$ son ajenos por pares.
Usando contrapositiva. Supongamos que para toda $i \in I_n$ $card(A_i) \leq 1$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} card(A) &= card(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) \\ &= card(A_1) + card(A_2) + \cdots + card(A_m) \\ &\leq 1 + 1 + \cdots + 1 \ (n - veces) \\ &= n \end{aligned}$$

Por lo tanto $m \leq n$. □

Proposición 1. *Si A y B son conjuntos finitos (no necesariamente ajenos) entonces*

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$

Demostración. Dado que $A \cap B \subset A \cup B$ entonces $(A \cap B) \cup (A \cup B) = A \cup B$ se tiene que

$$card(A \cup B) = card((A \cup B) \cup (A \cap B)) = card(A \cup B) + card(A \cap B)$$

por otro lado

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B)$$

por lo que

$$card(A) + card(B) = card(A \cup B) + card(A \cap B) \ \Rightarrow \ card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$

□

Teorema 2. ***Principio del producto.*** *Si A y B son conjuntos finitos entonces*

$$card(A \times B) = card(A) \cdot card(B)$$

Demostración. Según la cardinalidad del conjunto A se tiene

1. Si $card(A) = 0$ entonces $A = \emptyset$. sabemos que $A \times B = \emptyset$. De aquí

$$card(A \times B) = card(\emptyset) = 0 = 0 \cdot card(B) = card(A) \cdot card(B)$$

2. Supongamos ahora que $m > 0$ y que $card(A) = m$. Entonces hay una biyección entre A e I_m y por tanto se puede expresar

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$$

Vamos a ver que para cualquier $a_i \in A$ se tiene $\{a_i\} \times B$ tiene la misma cardinalidad que B.
Dado $a_i \in A$, definimos la función

$$f_i : \{a_i\} \times B \to B, \quad como \quad f_i(a_i, b) = b$$

I) Para ver que f_i es inyectiva, sean $(a_i, b),\ (a_i, c) \in \{a_i\} \times B$ tal que $f_i(a_i, b) = f_i(a_i, c)$, se tiene entonces

$$f_i(a_i, b) = f_i(a_i, c) \ \Rightarrow \ b = c, \ y \ como \ \ a_{i=a_i} \ \ entonces \ \ (a_i, b) = (a_i, c)$$

por tanto f_i es supra

II) Para ver que f es sobre. Sea $b \in B$ y sea $(a_i, b) \in \{a_i\} \times B$ entonces $f_i(a_i, b) = b$ y por tanto f es supra

podemos concluir entonces que $card(\{a_i\} \times B) = card(B)$

Veamos ahora que $\{\{a_i\} \times B \mid a_i \in A\}$ es una partición de $A \times B$

I) Como $card(A) > 0$ y $card(B) > 0$ entonces al menos $card(B) = 1$, esto quiere decir $(a_i, b) \in \{a_i\} \times B$ y por lo tanto

$$\{\{a_i\} \times B \mid a_i \in A\} \neq \emptyset$$

II) Sean $\{a_i\} \times B \neq \{a_j\} \times B$. Por demostrar que

$$\{a_i\} \times B \cap \{a_j\} \times B = \emptyset$$

Supongamos que no, entonces

$$\begin{aligned} \{a_i\} \times B \cap \{a_j\} \times B \neq \emptyset &\Rightarrow \exists \ (a, b) \in \{a_i\} \times B \cap \{a_j\} \times B \\ &\Rightarrow (a, b) \in \{a_i\} \times B \ \wedge \ (a, b) \in \{a_j\} \times B \\ &\Rightarrow a_i = a = a_j \ \ (falso) \ pues \ i \neq j \ \Rightarrow \ \ a_i \neq a_j \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\{a_i\} \times B \cap \{a_j\} \times B = \emptyset$$

III) Por demostrar que $\forall\ (a,b) \in A \times B\ \exists\ i \in I$ tal que $(a,b) \in \{a_i\} \times B$.

$$\begin{aligned}(a,b) \in A \times B &\Rightarrow a \in A \ \wedge \ b \in B\\ &\Rightarrow \exists\ i \in I_m \ \ni \ a = a_i\\ &\Rightarrow (a,b) = (a_i,b) \in (a,b) \in A \times B\end{aligned}$$

Entonces

$$A \times B = (\{a_1\} \times B \cup \{a_2\} \times B \cup \cdots \cup \{a_m\} \times B)$$

donde $\{a_j\} \times B$ son ajenos, tenemos entonces

$$\begin{aligned}card(A \times B) &= card\left(\{a_1\} \times B \cup \{a_2\} \times B \cup \cdots \cup \{a_m\} \times B\right)\\ &= card(\{a_1\} \times B) + card(\{a_2\} \times B) + \cdots + card(\{a_m\} \times B)\\ &= card(B) + card(B) + \cdots + card(B) \quad (m - veces)\\ &= m \cdot card(B)\\ &= card(A) \cdot card(B)\end{aligned}$$

$\square$

Principio general del producto Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$. Si $A_1, A_2, ..., A_k$ son conjuntos finitos, entonces

$$card(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) = card(A_1) \cdot card(A_2) \cdots card(A_k)$$

Demostración. La hacemos por inducción sobre $k \geq 2$.

a) Si $k = 2$, entonces según el resultado anterior

$$card(A_1 \times A_2) = card(A_1) \cdot card(A_2)$$

b) Supongamos la validez para k, es decir

$$card(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) = card(A_1) \cdot card(A_2) \cdots card(A_k)$$

c) Sean $A_1, A_2, ..., A_k, A_{k+1}$ conjuntos finitos, entonces

$$\begin{aligned}card(A_1 \times A_2 \times ... \times A_k \times A_{k+1}) &= card([A_1 \times A_2 \times ... \times A_k] \times A_{k+1})\\ &= card(A_1 \times A_2 \times ... \times A_k) \cdot card(A_{k+1})\\ &= card(A_1) \cdot card(A_2) \cdots card(A_k) \cdot card(A_{k+1})\end{aligned}$$

$\square$

Definición 3. *Dados A y B conjuntos, denotamos con ${}^{A}B$ al conjunto de todas las funciones de A en B, es decir,*

$${}^{A}B = \{f \mid f : A \to B\}$$

Teorema 3. *Si A y B son conjuntos finitos, entonces el número de funciones de A en B es $[card(B)]^{card(A)}$*

Demostración. Sea A un conjunto finito y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $card(A) = m$.
Si $m = 0$, entonces $A = \emptyset$ y la única función de A en B es la vacía, es decir, hay una única función de A en B, por lo que ${}^{A}B = 1$ por lo que

$$card({}^{A}B) = 1 = [card(B)]^{0} = [cardB]^{card(\emptyset)} = [cardB]^{cardA}$$

Si $m > 0$, entonces sea $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, usando que hay una biyección g de I_m en A y haciendo $g(i) = a_i$ para $i \in I_m$.
Ahora una función $f : A \to B$ queda determinada por sus valores $f(a_1), f(a_2), ..., f(a_m)$ en B.Considerando el orden natural de los elementos a_j, podemos pensar en estos valores como una $m - ada$ ordenada

$$(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_m))$$

de elementos de B, es decir, como un elemento de

$$B^m = B \times B \times \cdot \times B \quad (m - veces)$$

Así, definimos $F :^{A} B :\to B^m$ como

$$F(f) = (f(a_1), ..., f(a_m))$$

para cada $f \in^{A} B$.
Queremos ver que F es biyectiva

1. Para ver que F es sobre, sea $(b_1, ..., b_m) \in B^m$. Entonces definimos $f : A \to B$ como $f(a_i) = b_i$ para $i \in I_m$. De aquí que
$$F(f) = (f(a_1), ..., f(a_m)) = (b_1, ..., b_m)$$
por lo tanto, F es sobre.

2. Para ver que F es inyectiva, sean $f, h \in^{A} B$ tales que $F(f) = F(h)$. Entonces
$$\begin{aligned} F(f) = F(h) &\Rightarrow (f(a_1), ..., f(a_m)) = (h(a_1), ..., h(a_m)) \\ &\Rightarrow f(a_i) = h(a_i) \;\; para \;\; i \in I_m \\ &\Rightarrow f(a) = h(a) \;\; \forall\, a \in A \\ &\Rightarrow f = h \end{aligned}$$
por tanto f es inyectiva. Hay entonces una biyección entre ${}^{A}B$ y B^m por lo que
$$card({}^{A}B) = [card(B)]^{card(A)}$$

□