Sistema de ecuaciones de primer orden no homogéneas.

Dado el sistema lineal de primer orden no homogéneo

$$x' = Ax + f(t) \tag{1}$$

donde A es una matriz constante de $n \times n$ y el término no homogéneo $f(t)$ es un vector de funciones continuas, se sabe que la solución general de la ecuación (1) tiene la forma

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \tag{2}$$

donde

- $x_c(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t)$ es la solución general del sistema homogéneo asociado $x' = Ax$, y
- $x_p(t)$ es una sola solución particular del sistema no homogéneo original dado en (1).

se ha trabajado para obtener $x_c(t)$, el objetivo ahora es encontrar $x_p(t)$.

Coeficientes indeterminados Se supone primero que el término no homogéneo $f(t)$ en (1) es una combinación lineal (con un vector de coeficientes constantes) de productos de polinomios, funciones exponenciales y senos y cosenos. Así, el método de coeficientes indeterminados para sistemas es esencialmente el mismo que para una sola ecuación diferencial lineal. Se hace una suposición inteligente acerca de la forma general de la solución particular x_p, y posteriormente se intenta determinar los coeficientes de x_p, por sustitución en la ecuación (1). Además, la elección de esta forma general es esencialmente la misma que la del caso para una sola ecuación; sólo se modifica para utilizar coeficientes vectoriales indeterminados, en lugar de escalares indeterminados.

Ejemplo Encuéntrese una solución particular del sistema no homogéneo

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \end{pmatrix} \tag{3}$$

Solución El término no homogéneo $f = \begin{pmatrix} 3 & 2t \end{pmatrix}^T$ es lineal, por lo que es razonable escoger una solución particular lineal tentativa de la forma

$$x_p(t) = at + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Después de sustituir $x = x_p$ en la ecuación (3), se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1t + b_1 \\ a_2t + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3a_1 + 2a_2 \\ 7a_1 + 5a_2 + 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3b_1 + 2b_2 + 3 \\ 7b_1 + 5b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

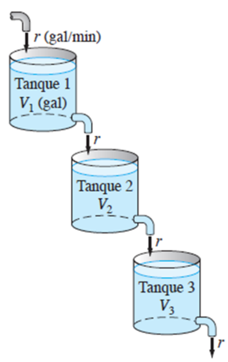
Igualando los coeficientes de t, así como los términos constantes (en las componentes en x_1 como en x_2), se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3a_1 + 2a_2 &= 0 \\ 7a_1 + 5a_2 + 2 &= 0 \\ 3b_1 + 2b_2 + 3 &= 0 \\ 7b_1 + 5b_2 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones en (5) se obtiene que $a_1 = 4$ y $a_2 = -6$. Con estos valores se pueden resolver las dos últimas ecuaciones en (5), resultando que $b_1 = 17$ y $b_2 = -25$. La sustitución de estos coeficientes en la ecuación (4) proporciona la solución particular $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$ de (3) descrita en forma escalar por

$$x_1(t) = 4t + 17,$$
$$x_2(t) = -6t - 25$$

Ejemplo La figura muestra el sistema de tres tanques de salmuera. Los volúmenes de los tres tanques son $V_1 = 20$, $V_2 = 40$ y $V_3 = 50$ (gal), y la velocidad de flujo común es de $r = 10$ (gal/min). Supóngase que los tres tanques contienen inicialmente agua fresca, pero al tanque 1 le entra salmuera con 2 lb de sal por gal, de tal manera que al tanque 1 le entran 20 lb de sal por min.



se observa que el vector $x(t) = (x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t))^T$ representa las cantidades de sal (en lb) en los tres tanques en el tiempo t que satisface el problema de valores iniciales no homogéneos

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & -0{,}2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

El término no homogéneo $f = (20 \quad 0 \quad 0)^T$ corresponde al flujo de entrada de 20 lb/min de sal al tanque 1, sin entradas (externas) de sal a los tanques 2 y 3.
Debido a que el término no homogéneo es constante, de manera natural se selecciona una función tentativa constante $x_p = (a_1 \quad a_2 \quad a_3)^T$, para la cual $x_p' = 0$. Así, la sustitución de $x = x_p$ en (6) obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & -0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que se resuelve fácilmente para $a_1 = 40$, $a_2 = 80$ y $a_3 = 100$, respectivamente. De este modo, la solución particular es

$$x_p(t) = 40 \quad 80 \quad 100^T$$

se encontró la solución general

$$x_c(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{4}} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{5}}$$

del sistema homogéneo asociado, tal que una solución general $x = x_c + x_p$ del sistema no homogéneo en (6) está dada por

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{4}} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{5}} + \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix} \tag{7}$$

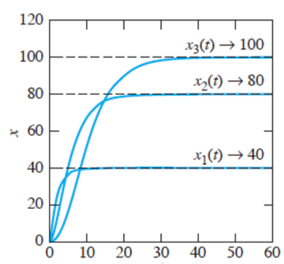
Cuando se aplican las condiciones iniciales nulas en (6), se obtienen las ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} 3c_1 + 40 &= 0 \\ -6c_1 + c_2 + 80 &= 0 \\ 5c_1 - 5c_2 + c_3 + 100 &= 0 \end{aligned}$$

que se resuelven fácilmente para $c_1 = -\dfrac{40}{3}$, $c_2 = -160$, $c_3 = -\dfrac{2500}{3}$. Sustituyendo estos coeficientes en la ecuación (7), se encuentra que las cantidades de sal en el tiempo t en los tres tanques están dadas por

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 40 - 40e^{-\frac{t}{2}} \\ x_2(t) &= 80 + 80e^{-\frac{t}{2}} - 160e^{-\frac{t}{4}} \\ x_3(t) &= 100 + \frac{100}{3}(-2e^{-\frac{t}{2}} + 24e^{-\frac{t}{4}} - 25e^{-\frac{t}{5}}) \end{aligned}$$

Como se ilustra en la figura



vemos que la sal en cada uno de los tres tanques se aproxima, conforme $t \to \infty$, a una densidad uniforme de 2 lb/gal la misma densidad de sal que la de la entrada al tanque 1.