Vector propio generalizado

Definición 1. *Sea A una matriz constante $n \times n$ y r un valor propio de A. Un vector no trivial u que satisface*

$$(A - rI)^k u = 0$$

para algún entero positivo k es llamado un vector propio generalizado asociado a r.

Una consecuencia del teorema de descomposición primaria del álgebra lineal avanzada es que si el polinomio característico de A es

$$p(r) = (r_1 - r)^{m_1}(r_2 - r)^{m_2} \cdots (r_k - r)^{m_k}$$

donde los r_i son valores propios distintos de A y m_i es la multiplicidad del valor propio r_i, entonces para cada i existen m_i vectores propios generalizados linealmente independientes asociados a r_i, y el conjunto combinado de $n = m_1+m_2+\cdots+m_k$ vectores propios generalizados es linealmente independiente. Además, si u es un vector propio generalizado asociado con r_i, entonces $(A-r_iI)^{m_i}u = 0$. Esto conduce al siguiente procedimiento para determinar n soluciones linealmente independientes del sistema $x' = Ax(t)$.

Solución de sistemas mediante vectores propios generalizados Para obtener un conjunto fundamental de soluciones para $x' = Ax(t)$:

a) Calcule el polinomio característico $p(t) = |A - rI|$ y determine los valores propios distintos $r_1, ..., r_k$.

b) Para cada valor propio r_i, determine m_i vectores propios generalizados linealmente independientes, donde m_i es la multiplicidad del valor propio r_i.

c) Use los n vectores propios generalizados linealmente independientes en (b) para calcular las n soluciones linealmente independientes de $x' = Ax$ de la forma

$$e^{At}u = e^{rt}\left(u + t(A - rI)u + \frac{t^2}{2}(A - rI)^2u + \cdots\right)$$

donde r es un valor propio y u es un vector propio generalizado correspondiente. Si r tiene multiplicidad m_i, entonces la serie anterior se reduce a los primeros m_i términos.

Ejemplo Determinar la matriz fundamental e^{At} para el sistema

$$x' = Ax, \quad donde \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución Primero calculamos el polinomio característico de A:

$$p(r) = |A - rI| = \begin{vmatrix} 1-r & 0 & 0 \\ 1 & 3-r & 0 \\ 0 & 1 & 1-r \end{vmatrix} = -(r-1)^2(r-3)$$

Por lo tanto, los valores propios de A son $r = 1$, con multiplicidad 2, y $r = 3$, con multiplicidad 1. Como $r = 1$ tiene multiplicidad 2, debemos determinar dos vectores propios generalizados linealmente independientes asociados a este valor. Comenzamos con $(A - I)u = 0$; es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos que $u_1 = u_2 = 0$ y $u_3 = s$, donde s es arbitrario. Así, sólo existe un vector propio generalizado linealmente independiente correspondiente a $r = 1$, y con $s = 1$ elegimos $u_1 = col(0, 0, 1)$. Por lo tanto, una solución de es

$$x_1(t) = e^t u_1 = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

A continuación resolvemos $(A - I)^2 = 0$. De

$$(A - rI)^2 u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vemos que $u_2 = -s$, $u_1 - 2u_2 = -2s$ y $u_3 = v$, donde s y v son arbitrarios. Haciendo $s = 1$ y $v = 0$, obtenemos el vector propio generalizado $u_2 = col(-2, 1, 0)$, que es linealmente independiente de u_1. Ahora usamos u_2 para obtener una segunda solución. Como $(A - I)^2 u_2 = 0$, la fórmula se reduce a

$$\begin{aligned} x_2(t) = e^{At} u_2 = e^t \left(u_2 + t(A - I)u_2 \right) &= e^t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2e^t \\ e^t \\ te^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para el valor propio $r = 3$, resolvemos $(A - 3I)u = 0$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para obtener el vector propio $u_3 = col(0, 2, 1)$. Por lo tanto, una tercera solución linealmente independiente es

$$x_3(t) = e^{3t} u_3 = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

La matriz X(t) cuyas columnas son los vectores $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ dados en las ecuaciones

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2e^t & 0 \\ 0 & e^t & 2e^{3t} \\ e^t & te^t & e^{3t} \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental para

$$x' = Ax, \quad donde \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Al hacer $t = 0$ y calcular $X^{-1}(0)$, tenemos que

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

La fórmula $e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$ implica ahora que

$$\begin{aligned} e^{At} &= X(t)X^{-1}(0) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2e^t & 0 \\ 0 & e^t & 2e^{3t} \\ e^t & te^t & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} & e^{3t} & 0 \\ -\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} & e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$