Principio del Buen Orden

$$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists m \in A \quad tal \quad que \quad \forall n \in A \quad m < n$$

Principio de Inducción
Sea A un subconjunto de números naturales tal que

$$1 \subset A$$

$$Si \quad n \subset A \quad entonces \quad n+1 \subset A \quad \therefore A = \mathbb{N}$$

Vamos a probar que:
Principio del buen orden $\Rightarrow$ **Principio de inducción**

Demostración. Vamos a suponer que dado un conjunto A tal que

$$1 \subset A$$

$$Si \quad n \subset A \quad entonces \quad n+1 \subset A \quad \therefore A \neq \mathbb{N}$$

consideramos ahora en conjunto $B = \mathbb{N} - A$ por lo que si $A \neq \mathbb{N}$ entonces $B \neq \emptyset$ por el principio del buen orden $\exists m \in B$ el menor elemento en B, tenemos entonces que:

$$m \neq 1 \in A \Rightarrow m > 1$$

podemos escribir $m = (m-1)+1$ y tenemos que $m-1 \in \mathbb{N}$ y $m-1 \notin B$ $\therefore$ $m-1 \in A$ lo que implica que $m-1+1 \in A$ lo cual es una contradicción.
$\therefore$ El principio del buen orden implica el principio de inducción □

Vamos a probar que:
Principio del inducción $\Rightarrow$ **Principio de buen orden**

Demostración. Vamos a suponer

$$A \neq \emptyset \Rightarrow \forall m \in A \quad \exists n \in A \quad tal \quad que \quad m \geq n$$

es decir A no tiene un primer elemento.
Sea B el conjunto de $\mathbb{N}$ tal que $1, 2, 3..., k \notin A$ se tiene entonces que

$$1 \in B \quad pues \quad 1 \in A \Rightarrow \forall n \in A \quad 1 < n$$

lo cual no ocurre pues A no tiene un primer elemento
Supongamos que $k \in B$ tenemos entonces que $k+1 \in B$ pues si $k+1 \in A$ sería el primer elemento de A, lo cual, no ocurre pues A no tiene primer elemento.
$\therefore$ por el principio de inducción $B = \mathbb{N}$ pero si $B = \mathbb{N} - A$ entonces $A = \emptyset$ lo cual es una contradicción.
Por lo tanto A debe tener un primer elemento □

Compleción de los números reales

Def: Si X es un subconjunto de $\mathbb{R}$, un número real β se dice que es una cota superior de X si, para cualquier elemento $x \in X$, se cumple $x \leq \beta$.

Análogamente, un número real α se dice que es una cota inferior de X si, para cualquier elemento $x \in X$, se cumple que $\alpha \leq x$.

Un subconjunto X de $\mathbb{R}$ se denomina acotado superiormente (respectivamente acotado inferiormente), si X tiene alguna cota superior (respectivamente inferior). Se dice que X es acotado si lo es superior e inferiormente.

Si X es un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente, una cota superior s de X se denomina supremo de X, escribiéndose $s = supX$, si s es menor que cualquier otra cota superior de X, esto es, si satisface las dos condiciones siguientes:

1) $x \leq s \;\; \forall x \in X$
2) $Si \quad x \leq b \;\; \forall x \in X$ entonces $s \leq b$.

De forma análoga, si X es un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente, una cota inferior i de X se denomina ínfimo de X, escribiéndose $i = inf\ X$, si i es mayo que cualquier otra cota inferior de X, es decir, si verifica las 2 condiciones siguientes

1) $i \leq x \;\; \forall x \in X$
2) $Sib \leq x \;\; \forall x \in X$, entonces $b \leq i$

Cuando el supremo s de un conjunto X cumple $s \in X$, se dice que el supremo de X es accesible y se denomina entonces máximo de X, escribiéndose $max\ X$. Si el ínfimo de un subconjunto X pertenece a dicho conjunto, se denomina mínimo de X y se escribe $min\ X$.

Ejemplos:

$a)$ El conjunto $R_0^+ = \{x \in \mathbb{R} | \, 0 < x\}$ Ño esta acotado superiormente ya que no existe ningún número real β tal que $x \leq \beta \;\; \forall x \in R_0^+$. No obstante dicho conjunto esta acotado inferiormente pues todo número real negativo α es cota inferior de R_0^+ ya que se cumple $\alpha < 0 < x \;\; \forall x \in R_0^+$.

$b)$ $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ Tiene cota inferior, tiene cota superior
Tiene $max = 1$, tiene $min = 0$

$c)$ $\left\{ \frac{1}{n} \middle| \, n \in \mathbb{Z} yn \neq 0 \right\}$ Tiene cota inferior $= -\frac{1}{2}$, tiene cota superior$= 1$

Tiene $max = 1$, tiene $min = -\frac{1}{2}$

d) $\left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ Tiene cota superior$= \frac{3}{2}$, tiene cota inferior$= -1$
Tiene $max = \frac{3}{2}$, ño tiene min

Axioma del Supremo

Si S es un conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente, existe $sup\ S$.

Teorema 1. *Si S es un conjunto de números reales no vacío y acotado inferiormente entonces S tiene ínfimo.*

Demostración. Sea m una cota inferior de S y H el conjunto de las cotas inferiores. H es no vacío pues $m \in H$. H esta acotado superiormente por cualquier elemento de S. Sea M el supremo de H. Entonces $\mu = inf\ S$ 1) $\forall x \in S$ se verifica $\mu \leq x$ (μ es cota inferior)
2) $\forall y \in H \;\; y \leq \mu$. Por tanto μ es el ínfimo de S. □

Teorema 2. *Si S es un conjunto de números reales tal que $supS$ existe, entonces $supS$ es único*

Demostración. Supongamos que $supS = A$ y $supS = B$ entonces $A \leq B$ por ser $B = supS$
$B \leq A$ por ser $A = supS$ $\therefore A = B$ □

Teorema 3. *Sea S un conjunto no vacío de números reales y acotado superiormente, entonces $M = sup\ S \iff$ 1) $x \leq M\ \forall x \in S$ y 2) $\forall \varepsilon > 0$ existe $x \in S$ tal que $M < x + \varepsilon$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Sea $M = sup\ S$ entonces 1) se cumple por definición de supremo, para 2) supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que ningún $x \in S$ cumple 2). $\therefore$ $M - \varepsilon < x \;\; \forall\ x \in S$, es decir $x \leq M - \varepsilon \;\; \forall\ x \in S$ y se tiene que $M - \varepsilon < x\ \forall\ x \in S$ $\therefore$ $M - \varepsilon$ es una cota superior de S y M no puede ser entonces supremo de S <u>CONTRADICCIÓN</u>.
$\Leftarrow$ Supongamos que se cumple 1) y 2) Por reducción al absurdo supongamos que M no es el supremo de S por 1), M es cota superior de S. Sea $M' < M$ una cota superior y tomamos $\varepsilon = M - M'$ entonces si M cumple 2) $M < x + \varepsilon \Rightarrow M < x + M - M' \Rightarrow M' < x$ para algún x <u>CONTRADICCIÓN</u>. Pues M' es cota superior de S. $\therefore$ $M = sup\ S$. □

Teorema 4. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ $S \neq \emptyset$, S acotado superiormente y $a \in \mathbb{R}$. Si $a + S = \{a + x | x \in S\}$ probar que $sup(a + S) = a + supS$*

Demostración. Por el axioma del supremo existe $supS$ sea $\mu = supS$ por lo que tenemos que

$$x \leq \mu \quad \forall x \in S \Rightarrow a + x \leq \mu + a \quad \forall x \in S$$

por lo que $\mu + a$ es cota superior de $a + S$ lo que implica que $sup(a+S) \leq a + \mu$
Sea V una cota superior de $a + S$ por lo que

$$a + x \leq V \quad \forall x \in S \Rightarrow x \leq V - a \quad \forall x \in S \Rightarrow \mu \leq V - a \Rightarrow a + \mu \leq V$$

por lo que $a + \mu$ es la menor de las cotas superiores de $a + S$ $\therefore$ $sup(a+S) = a + \mu = a + supS$ $\square$

Propiedad Arquimediana

Dados $a > 0, \quad b > 0$ arbitrarios, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$

Demostración. Por contradicción. Supongamos que $b \geq na \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ y sea S el conjunto de todos los números $na, \quad (n = 1, 2, ...)$. Como $S \neq \emptyset$ y b es cota superior de S entonces $\exists \ \mu = supS$. Es claro que $na \leq \mu \leq b \ \forall \ n \in \ \mathbb{N}$. También $(n+1)a \leq \mu \ \ \forall \ n \in \mathbb{N} \therefore \ \ n \leq \mu - a$ es cota superior de S y como $\mu - a < \mu$ entonces μ no es el $sup\ S$ <u>CONTRADICCIÓN.</u> $\therefore$ S no esta acotado, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$. $\square$

Teorema 5. *Si a es tal que $0 \leq a < \frac{1}{n} \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ necesariamente $a = 0$*

Demostración. Supongamos $0 < a$ entonces $a < \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad an < 1 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ lo cual no puede ocurrir pues los naturales no están acotados. $\therefore \quad a = 0$ $\square$

Teorema 6. *(Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$). Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, entonces existe un número racional r tal que $x < r < y$.*

Demostración. Dado $y > x$, se cumple que $y - x > 0$ y por la propiedad arquimediana $\exists \ n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n(y - x) = ny - nx$. Si la diferencia entre 2 números es mayor a 1 necesariamente existe un número entero entre ellos (m), esto es $nx < m < ny$ en consecuencia se cumple que $x < \frac{m}{n} < y$ en definitiva $r = \frac{m}{n}$ es el número racional $\square$

Teorema 7. *Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, entonces existe un número irracional z tal que $x < z < y$*

Demostración. Aplicando la propiedad de densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ a los números $\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}$ tenemos que existe un número racional $r \neq 0$ tal que $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$. En consecuencia $x < r\sqrt{2} < y$ de manera que $z = \sqrt{2}$ es el número irracional buscado. Vamos a justificar que $r\sqrt{2}$ no esta en $\mathbb{Q}$ Supongamos $r\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad r\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} = \frac{1}{r}\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \therefore \ \sqrt{2} = \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}$ <u>CONTRADICCIÓN.</u>$\therefore$ $r\sqrt{2}$ no esta en $\mathbb{Q}$ $\square$