Funciones Exponenciales y Logaritmicas

Función creciente: Se dice que una función f es creciente si $\forall a, b \in Dom_f$ con $a < b$ se tiene que $f(a) < f(b)$
Función dcreciente: Se dice que una función f es decreciente si $\forall a, b \in Dom_f$ con $a < b$ se tiene que $f(a) > f(b)$
Si se tiene una función creciente f: $A \to B$ y dados $x, y \in A$ tal que $x < y$ entonces por ser f creciente se tiene que $f(x) < f(y)$, es decir si se tiene que $x \neq y$ entonces $f(x) \neq f(y)$ y esto quiere decir que f es inyectiva. Ahora si nos restrijimos a Imf=B se tiene que para cada $b \in Imf$ se tiene que existe $a \in A$ talque $f(a) = b$ y esto quiere decir que f es sobreyectiva y por tanto es biyectiva, asi que, admite una función inversa.
Lo anterior muestra que una función creciente es biyectiva restrinjida a a su imagen.

Definición 1. *Dado $a > 0$ la función $f(x) = a^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ se llama función exponencial con base a*

Supongamos que f satisface
a) $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$ es decir $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
b) $(a^x)^y = a^{xy}$
Vamos a ver que f es estrictamente creciente

Demostración. Dados $x, y \in Domf$ con $x < y$ vamos a suponer que $a^x \geq a^y$ esto implicaría que $\frac{a^x}{a^y} \geq 1$ por lo que $a^{x-y} \geq 1$ lo cual no puede ser pues $x < y \Rightarrow x - y < 0$ por lo tanto $a^{x-y} \leq 1$. Por lo tanto debe ocurrir que $a^x < a^y$ y por tanto f sería creciente $\square$

En consecuencia f es biyectiva por tanto admite inversa, a dicha inversa la denotaremos $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ de tal manera que $y = f(x) = \log_a(x)$ con $a > 0$, y $a \neq 1$
Vamos a probar la siguiente propiedad de los logaritmos

Teorema 2. $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$

Demostración. Sean $y_1 = \log_a(x_1)$ y $y_2 = \log_a(x_2)$ entonces $a^{y_1} = x_1$ y $a^{y_2} = x_2$ por lo tanto

$$x_1 \cdot x_2 = a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1+y_2}$$

$\therefore$

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = y_1 + y_2 = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$$

$\square$

Funciones Polinomiales

Una función f es una función polinómica si existen números reales $a_0, a_1, ..., a_n$ tal que

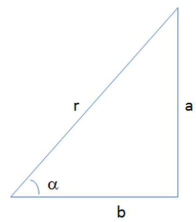
$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \quad \forall x$$

Funciones Racionales

Son funciones de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómiales y $p(x) \neq 0$

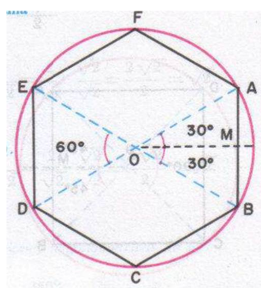
Funciones Trigonométricas

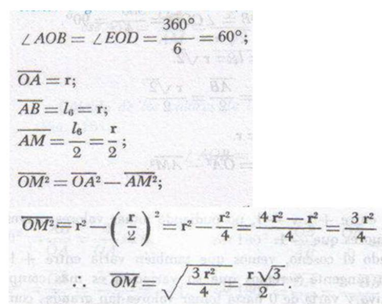
Son las funciones que se definen en base a razones trigonometricas en un triángulo rectangulo ó en un circulo unitario. Dado el triángulo $\triangle$



podemos definir las funciones $\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{r}$, $\cos\alpha = \frac{b}{r}$, $\tan\alpha = \frac{b}{a}$, $\sec\alpha = \frac{r}{b}$, $\csc\alpha = \frac{r}{a}$ y $\cot\alpha = \frac{a}{b}$

También podemos trabajar sobre el circulo unitario para definir las funciones trigonometricas y calcular algunos de sus valores que utilizaremos frecuentemente





$\angle AOB = \angle EOD = \frac{360°}{6} = 60°$;

$\overline{OA} = r$;

$\overline{AB} = l_6 = r$;

$\overline{AM} = \frac{l_6}{2} = \frac{r}{2}$;

$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AM}^2$;

$\overline{OM}^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{4r^2 - r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$;

$\therefore\ \overline{OM} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

Según la figura tenemos que

$$\operatorname{sen} 30 = \frac{\overline{AM}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30 = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{r\sqrt{3}}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

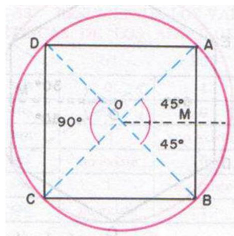
$$\tan 30 = \frac{\overline{AM}}{\overline{OM}} = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30 = \frac{\overline{OM}}{\overline{AM}} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{\frac{r}{2}} = \frac{r\sqrt{3}}{r} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30 = \frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{r}{\frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{2r}{r\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 30 = \frac{\overline{OA}}{\overline{AM}} = \frac{r}{\frac{r}{2}} = \frac{2r}{r} = 2$$

Para el caso del ángulo de 45



$$\angle AOB = \angle COD = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ.$$

$$\overline{AB} = l_4 = r\sqrt{2}.$$

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

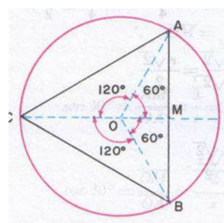
$$\overline{OA} = r.$$

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AM}^2.$$

$$\overline{OM}^2 = r^2 - \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{2r^2}{4} = \frac{4r^2 - 2r^2}{4} = \frac{2r^2}{4} = \frac{r^2}{2}.$$

$$\therefore \quad \overline{OM} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

Para el caso del ángulo de 60



$$\angle AOB = \angle AOC = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ.$$

$$\overline{OA} = r.$$

$$\overline{AB} = l_3 = r\sqrt{3}.$$

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

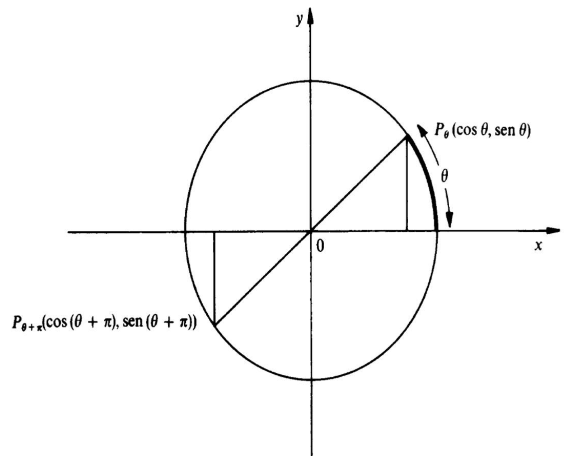
$$\begin{aligned}\overline{OM}^2 &= \overline{OA}^2 - \overline{AM}^2 = \\ &= r^2 - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \\ &= r^2 - \frac{3r^2}{4} = \\ &= \frac{4r^2 - 3r^2}{4} = \frac{r^2}{4}.\end{aligned}$$

$$\overline{OM} = \sqrt{\frac{r^2}{4}}; \quad \therefore \quad \overline{OM} = \frac{r}{2}.$$

Los mas usuales en el curso se dan en la sdiguiente tabla

FUNCION	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
csc	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Dado $\theta \in \mathbb{R}$ P_θ y $P_{\theta+\pi}$ son simétricos respecto al origen y 0 es el punto medio del segmento$\overline{P_\theta P_{\theta+\pi}}$



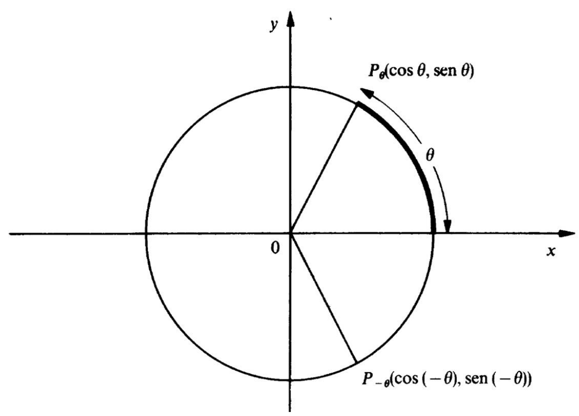
tenemos entonces que

$$\frac{\cos(\theta+\pi)+\cos\theta}{2}=0 \quad \frac{\operatorname{sen}(\theta+\pi)+\operatorname{sen}\theta}{2}=0$$

y de aquí

$$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta \quad \operatorname{sen}(\theta+\pi)=-\operatorname{sen}\theta$$

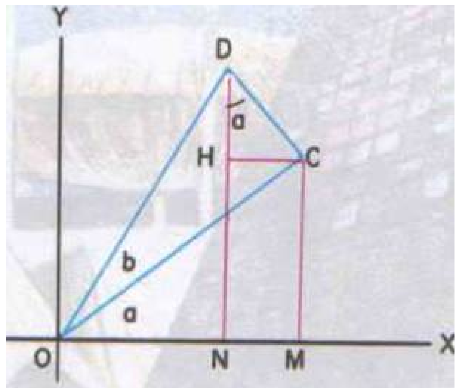
Se tiene también que los puntos P_θ y $P_{-\theta}$ son simétricos respecto al eje X



por lo que sus primeras coordenadas son iguales y las segundas son simétricas por tanto

$$\cos(\theta)=\cos(-\theta) \quad y \quad -\operatorname{sen}(\theta)=\operatorname{sen}(-\theta)$$

Vamos a ver una fórmula para la suma de ángulos



Según la figura se tiene que

$$\operatorname{sen}(a+b) = \frac{ND}{OD}$$

pero

$$ND = NH + HD$$

por tanto

$$\frac{ND}{OD} = \frac{NH + HD}{OD} = \frac{NH}{OD} + \frac{HD}{OD}$$

por otro lado

$$NH = CM$$

por tanto

$$\frac{NH}{OD} + \frac{HD}{OD} = \frac{CM}{OD} + \frac{HD}{OD} = \frac{CM}{OD} \cdot \frac{OC}{OC} + \frac{HD}{OD} \cdot \frac{DC}{DC} = \frac{CM}{OC} \cdot \frac{OC}{OD} + \frac{HD}{DC} \cdot \frac{DC}{OC}$$

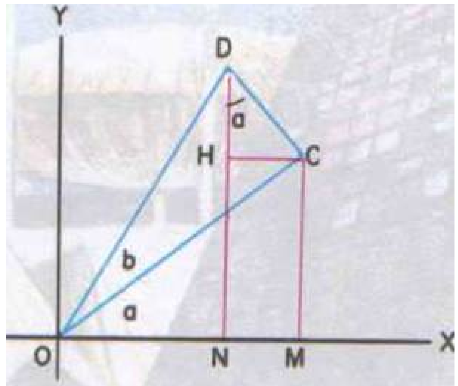
pero según la figura

$$\frac{CM}{OC} = \operatorname{sen} a \quad \frac{OC}{OD} = \cos b \quad \frac{HD}{DC} = \cos a \quad \frac{DC}{OC} = \operatorname{sen} b$$

por tanto

$$\operatorname{sen}(a+b) = \frac{CM}{OC} \cdot \frac{OC}{OD} + \frac{HD}{DC} \cdot \frac{DC}{OC} = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$

Vamos a ver una fórmula para la suma de ángulos



Según la figura se tiene que

$$\cos(a+b) = \frac{ON}{OD}$$

pero

$$ON = OM - NM$$

por tanto

$$\frac{ON}{OD} = \frac{OM - NM}{OD} = \frac{OM}{OD} - \frac{NM}{OD}$$

por otro lado

$$NM = HC$$

por tanto

$$\frac{OM}{OD} - \frac{NM}{OD} = \frac{OM}{OD} - \frac{HC}{OD} = \frac{OM}{OD} \cdot \frac{OC}{OC} - \frac{HC}{OD} \cdot \frac{DC}{DC} = \frac{OM}{OC} \cdot \frac{OC}{OD} - \frac{HC}{DC} \cdot \frac{DC}{OC}$$

pero según la figura

$$\frac{OM}{OC} = \cos a \quad \frac{OC}{OD} = \cos b \quad \frac{HC}{DC} = \operatorname{sen} a \quad \frac{DC}{OC} = \operatorname{sen} b$$

por tanto

$$\cos(a+b) = \frac{OM}{OC} \cdot \frac{OC}{OD} + \frac{HC}{DC} \cdot \frac{DC}{OC} = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$