INTRODUCCIÓN HISTORICA

Newton y Leibniz, independientemente uno del otro, fueron en gran parte los responsables del desarrollo de las ideas básicas del Cálculo. La idea central del Cálculo Diferencial es la noción de derivada. Igual que la integral, la derivada fue originada por un problema de Geometría: El problema de hallar la tangente en un punto a una curva. Sin embargo, a diferencia de la integral, la derivada aparece muy tarde en la historia de la matemática. Este concepto no se formuló hasta el siglo XVII, cuando el matemático frances Pierre de Fermat, trató de determinar los máximos y mínimos de ciertas funciones.

LOS PROBLEMAS QUE FUNDAMENTAN EL CÁLCULO

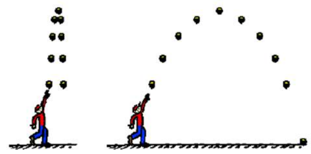
El cálculo fue creado sobre todo para tratar los principales problemas científicos del siglo XVII.

Problemas relativos a velocidad:

Dada la fórmula de la distancia que un cuerpo recorre como función del tiempo, obtener la velocidad y la aceleración en cualquier instante; y, al revés, dada la fórmula que describe la aceleración de un cuerpo como función del tiempo, obtener la velocidad y la distancia recorrida. Este problema surgió directamente en el estudio del movimiento, y la dificultad que planteaba era que las velocidades y las aceleraciones que interesaban en el siglo XVII variaban de instante en instante. Al calcular una velocidad instantanea, por ejemplo, no se puede dividir la distancia recorrida por el tiempo empleado, como ocurre en el caso del cálculo de la velocidad media, porque en un instante dado tanto la distancia recorrida como el el tiempo empleado son cero, y $\frac{0}{0}$ no tiene sentido. Sin embargo, era claro desde un punto de vista físico que los objetos móviles tienen una velocidad en cada instante de su viaje. El problema inverso de obtener la distancia recorrida, conociendo la fórmula de la velocidad, incluye la dificultad correspondiente; no se puede multiplicar la velocidad en cualquier instante de tiempo utilizado para obtener el espacio recorrido, porque la velocidad varía de un instante a otro.

Vamos a investigar un poco como obtener la velocidad de un objeto en movimiento.

Supongamos que se lanza un proyectil verticalmente desde el suelo a una velocidad de 45 m por segundo.



Precindiendo del rozamiento, se supone que solamente actúa la gravedad, por lo que el proyectil se mueve en línea recta. Sea $f(t)$ la altura en metros que alcanza el proyectil t segundos después del lanzamiento. Si la fuerza de gravedad no actuara en él, el proyectil continuaría subiendo a velocidad constante, recorriendo una distancia de 45 metros por segundo, y en el tiempo t se tendría $f(t) = 45t$. Pero a causa de la gravedad, el proyectil va retardándose hasta que su velocidad llega a cero, a a partir de este momento cae al suelo. Experimentos indican que mientras el proyectil está en movimiento su altura $f(t)$ viene dada por la fórmula $f(t) = 45t - 5t^2$, donde el término $-5t^2$ es debido a la influencia de la gravedad. Tenemos que $f(t) = 0 \Leftrightarrow 45t - 5t^2 = \Leftrightarrow t = 0$ ó $t = 9$ o sea que el proyectil regresa a la tierra después de 9 segundos $\therefore t \in [0, 9]$

Problema: Determinar la velocidad del proyectil en cada instante de su movimiento Para ello necesitamos precisar lo que se entiende por velocidad en cada instante.

Se define la velocidad media en un intervalo de tiempo $t + h, t$ como

$$\frac{Diferencia \quad de \quad distancia \quad en \quad el \qquad intervalo \quad de \quad tiempo}{intervalo \quad de \quad tiempo} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

en nuestro caso tenemos que:

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{45(t+h) - 5(t+h)^2 - (45t - 5t^2)}{h} = \frac{45h - 10th - 5h^2}{h} = 45 - 10t - 5h$$

Cuando h tiende a cero, la expresión tiende a $45 - 10t$. Definimos para este caso la velocidad instantanea en el instante t

$$v(t) = 45 - 10t$$

Ésta fórmula define una nueva función v que indica la rapidez con que se muevwe el proyectil en cada instante de su movimiento.

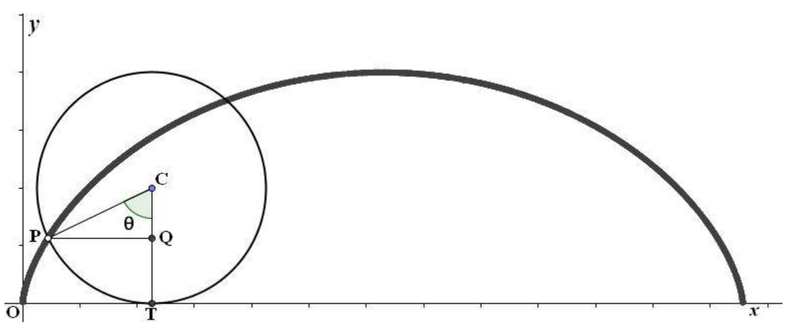
Este proceso por el cual se obtiene $v(t)$ a partir del cociente se denomina "hallar el limite cuando h tiende a ceroz se representa

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

La Cicloide

La aparición de la curva cicloide por primera vez en la escena matemática no tiene una fecha clara. Parece ser que el filósofo y teólogo francés Charles de Bouvelles (1471-1553) fue pionero en trabajar con la curva cicloide, orientando sus estudios sobre dicha curva en relación con el problema de la cuadratura del círculo..^Alrededor de 1599, Galileo acuñaa el término cicloide y se encarga de estudiar por primera vez el área que encierra un arco de cicloide en base a consideraciones de carácter mecánico. Galileo efectuó la comparación entre el peso de un arco de cicloide y el círculo generador, hallando que los pesos se encontraban en relación de 3 a 1, pero decidió (erróneamente) que no debía ser exactamente 3, ya que intuía que dicha razón no debía ser un número racional. Roberval en 1634 ganó el concurso para el nombramiento para ocupar la cátedra de Ramus en el Collége Royal, la que no consiguió ocupar sino hasta 1675, año de su muerte. En 1634 demostr ó que el área encerrada bajo un arco de cicloide es exactamente 3 veces el área de círculo generador. En el año 1638 descubre un método para trazar tangentes a la cicloide en cualquiera de sus puntos, problema que resolvieron Fermat y Descates simultáneamente.

Ecuaciones parámetricas de la Cicloide

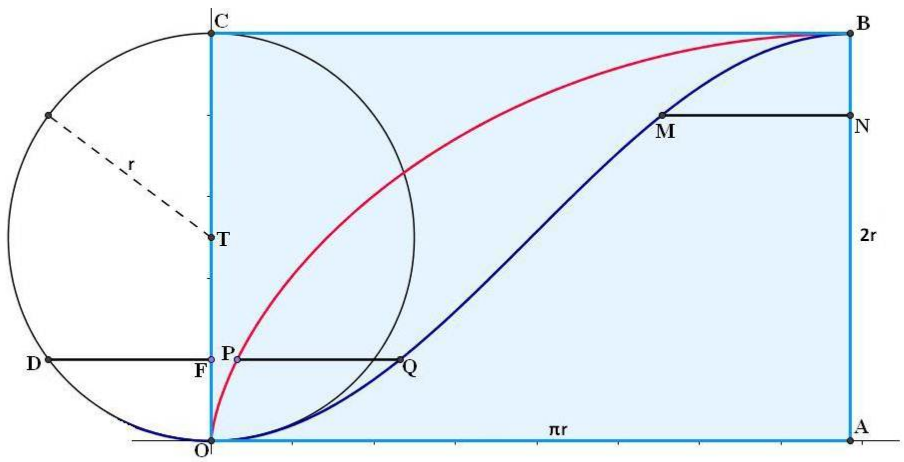


Según la figura $OT = r\theta$, $PQ = r \operatorname{sen} \theta$ y $QC = r \cos \theta$ Por lo tanto

$$x = OT - PQ = r\theta - r \operatorname{sen} \theta$$

$$y = r - QC = r - r\cos\theta$$

Problema :Se trata de encontrar el área bajo un arco de la cicloide



Sea OPB la mitad del arco de cicloide generada por el círculo de radio r centrado en T. El área del rectángulo OABC es $2\pi r^2$, es decir, que es el doble del círculo generador. Tracemos segmentos horizontales DF, con longitud determinada por el diámetro OC y la círcunferencia. Ahora trasladamos horizontalmente el segmento DF conservando la altura OF de tal manera que el punto D vaya al punto alrededor de la cicloide P y F determine un punto Q. De esta manera $DF = PQ$ se dibuja una curva asociada a la cicloide, la curva OQB divide a $OABC$ en 2 partes iguales.