Cortaduras de Dedekind

Un método para completar los números irracionales y obtener $\mathbb{R}$ fué ideado por Dedekind, se basa en el concepto de cortaduras.

Definición 1. *Se dice que un par ordenado (A,B) de subconjuntos no vacios de $\mathbb{R}$ forma una cortadura si $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B$=$\mathbb{R}$*

Por ejemplo si tomamos $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ formamos los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq \sqrt{2}\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} | x > \sqrt{2}\}$$

estos conjuntos satisfacen las condiciones para definir una cortadura en $\mathbb{R}$

Teorema 1. *Si (A,B) es una cortadura en $\mathbb{R}$, entonces existe un número único $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq \xi \ \forall a \in A$ y $\xi \leq b \ \forall b \in B$*

Demostración. Tenemos que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ y cualquier elemento de B es cota superior de A por tanto $\exists \ supA = \xi$, se debe cumplir que $a \leq \xi \ \forall a \in A$. Si $b \in B$ por definición de cortadura $a \leq b \ \forall a \in A$ y b es cota superior de A $\therefore \xi \leq b$. Esto demuestra la existencia de tal número ξ. Para comprobar su unicidad tenemos que si $\exists \eta \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq \eta \forall a \in A$ y $\eta \leq b \forall b \in B$ entonces η es una cota superior de A $\therefore \xi \leq \eta$, si $\xi < \eta$ entonces existe $\mu = \frac{\xi + \eta}{2}$ tal que $\xi < \mu < \eta$. Ahora bien $\mu \in A$ ó $\mu \in B$. Si $\mu \in A$ se contradice el hecho de que $a \leq \xi$ $\forall a \in A$. Si $\mu \in B$ se contradice el hecho de que $\eta \leq b \ \forall b \in B$ por lo tanto $\xi = \eta$. □

Celdas ó Intervalos

Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$ entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ se denomina celda abierta ó intervalo abierto.
Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$ entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ se denomina celda cerrada ó intervalo cerrado.

Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$ entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ se denomina celda semiabierta ó intervalo semiabierto.
Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$ entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ se denomina celda semiabierta ó intervalo semiabierto.
La celda unitaria es el conjunto $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$ se le denota $I = [0,1]$.
Si se tiene la siguiente sucesión de celdas

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

se dice que tal sucesion de celdas es nidificada.

Teorema 2. *Si $n \in \mathbb{N}$, sea I_n una celda no vacía cerrada en $\mathbb{R}$ y suponga que esta sucesión es nidificada*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

Entonces existe un elemento que pertenece a todas estas celdas.

Demostración. Suponga que $I_n = [a_n, b_n]$ en donde $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ como $I_n \subseteq I_1$ se tiene que $a_n \leq I_1$ $\forall n$ $\therefore$ $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ esta acotado superiormente por lo tanto $\exists$ $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \xi$ esto implica que $a_n \leq \xi$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $\xi \leq b_n$ $\forall n \in \ltimes$ pues si esto no ocurriera existiría $m\mathbb{N}$ tal que $b_m < \xi$. Dado que ξ=$\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ existe a_p tal que $b_m < a_p$ tomamos el mayor de los naturales m, p y puesto que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ y $b_1 \geq g_2 \geq \cdots$ se deduce que $b_q \leq b_m < a_p \leq a_q$ $\therefore$ $b_q < a_q$ lo cual es una contraqdicción pues $I_q = \{x \in \mathbb{R} | a_q \leq x \leq b_q\}$ $\therefore$ $\xi \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y como $a_n \leq \xi \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces deducimos que $\xi \in I_n = [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\square$

Representación Decimal

Teorema 3. *Sea $y > 0$ existe entoces un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq y < n$*

Demostración. La propiedad arquimediana asegura que existen números naturales m tal que $y < m$. Sea n el mínimo de estos números naturales entonces $n - 1 \leq y < n$ $\square$

Representación decimal de los números reales

Def: Sea $x \in \mathbb{R}$ un número real cualquiera; supondremos que $x \geq 0$, sin pérdida de generalidad.

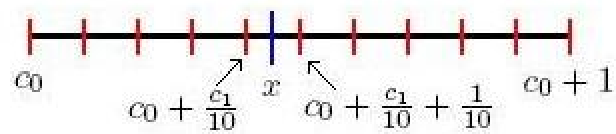
Es fácil probar que existe un número natural $c_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c_0 \leq x < c_0 + 1$

Existe $c_0 \in \mathbb{Z}$ tal que para $x \in \mathbb{R}$ $c_0 \leq x < c_0 + 1$

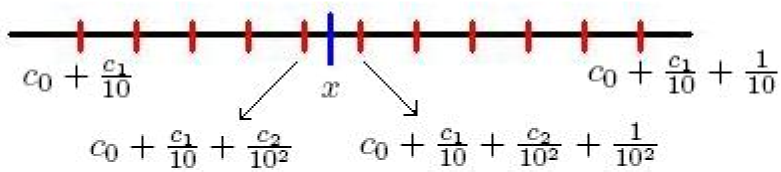
Dividimos el intervalo $[c_0, c_{0+1}]$ en 10 partes iguales por:

$c_0, c_0 + \frac{1}{10}, c_0 + \frac{2}{10}, c_0 + \frac{3}{10} + \ \dots \ + c_0 + \frac{9}{10} + c_0 + 1$

Existe un digito $0 \leq c_1 \leq 9$ tal que: $c_0 + \frac{c_1}{10} \leq 10 < c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{1}{10}$



Continuamos con el proceso:



Repitiendo este proceso, después de n pasos tenemos una sucesión de celdas nidificadas dada por:

$$I_1 = [c_0, c_0 + 1]$$

$$I_2 = [c_0 + \frac{c_1}{10}, c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{1}{10}]$$

$$I_2 = [c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2}, c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}]$$

etc.

Donde se tiene $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots I_n$. Según el teorema de celdas nidificadas existe un único x tal que $x \in \bigcap I_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Con lo anterior, la expresión $x = c_0 + 0 \centerdot c_1c_2c_3...$ se denomina representación decimal de x. De manera un tanto informal se acaba de probar que todo número real tiene una representación decimal.

La representación decimal de un número real se dice que es finita, cuando existe un $n \in \ \mathbb{N}$ tal que $c_m = 0 \ \ \forall \ m > n$, es decir, cuando la representación decimal es de la forma $x = c \centerdot c_1c_2c_3...c_m$

La representación decimal se denomina periódica cuando es de la forma $a \centerdot a_1a_2a_nb\overline{b_1...b_m}$