Derivadas de Orden superior

Para una función cualquiera f, al tomar la derivada, obtenemos una nueva función f' y podemos aplicar la derivada a f'.
La función $(f')'$ se suele escrbir f'' y recibe el nombre de derivada segunda de f. Si f'' existe, se dice que, f es dos veces derivable en a.
De manera similar podemos definir $f''' = (f'')'$
La notación usual es:

$$f' = f^1, \quad f'' = f^2, \quad f''' = f^3, ...,^{k+1} = (f^k)'$$

Las distintas funciones f^k para $k \geq 2$ son a veces llamadas derivadas de orden superior.
Podemos tomar $f^0 = f$.
Ejemplo.-Si $f(x) = a^x$
Tenemos que
$f'(x) = a^x \ln(a)$
$f''(x) = a^x \ln^2(a)$
$f'''(x) = a^x \ln^3(a)$
Esto sugiere la fórmula

$$(a^x)^n = \ln^n(x) \quad a > 0$$

Esta fórmula se puede demostrar por inducción
Para la base de la inducción $n = 1$ tenemos que

$$(a^x)' = a^x \ln(a)$$

Supongámos ahora la validez de la fórmula para n

$$(a^x)^n = a^x \ln^n(a)$$

Ahora veamos que la propiedad se cumple para $n + 1$
tenemos que

$$(a^x \ln^n(a))^{n+1} = ((a^x \ln^n(a))^n)' = \ln^n(a) \left((a^x)^n\right)' = \ln^n(a) a^x \ln(a) = a^x \ln^{n+1}(a)$$

por lo tanto la fórmula es valida para $n + 1$.
Ejemplo.-Hallar $f^{17}(x)$ para $f(x) = a^x$
Tenemos que según la fórmula

$$f^{17}(x) = (a^x)^{17} = a^x \ln^{17}(a)$$

Ejemplo.-Si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$
Tenemos que
$f'(x) = \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) = \cos(x)$
$f''(x) = -\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x)\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) = -\operatorname{sen}(x)$
$f'''(x) = -\cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x)\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) + \cos(x)\operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$
Esto sugiere la fórmula

$$(\operatorname{sen}(x))^n = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Esta fórmula se puede demostrar por inducción
Para la base de la inducción $n = 1$ tenemos que

$$(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) = \cos(x)$$

Supongámos ahora la validez de la fórmula para n

$$(\operatorname{sen}(x))^n = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Ahora veamos que la propiedad se cumple para $n + 1$
tenemos que

$$(\operatorname{sen}(x))^{n+1} = ((\operatorname{sen}(x))^n)' = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \underbrace{=}_{*} \operatorname{sen}\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

(*)La última igualdad la justificamos de la siguiente manera

$$\operatorname{sen}\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

por lo tanto la fórmula es valida para $n + 1$.
Ejemplo.-Hallar $f^{17}(x)$ para $f(x) = \operatorname{sen}(x)$
Tenemos que según la fórmula

$$f^{17}(x) = (\operatorname{sen}(x))^{17} = \operatorname{sen}\left(x + \frac{17\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x)\cos\left(\frac{17\pi}{2}\right) + \cos(x)\operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

Ejemplo.-Si $f(x) = \cos(x)$
Tenemos que
$f'(x) = -\operatorname{sen}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(x)$
$f''(x) = -\cos(x) = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(x) = -\cos(x)$
$f'''(x) = \operatorname{sen}(x) = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x)$
Esto sugiere la fórmula

$$(\operatorname{sen}(x))^n = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Esta fórmula se puede demostrar por inducción
Para la base de la inducción $n = 1$ tenemos que

$$(\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

Supongámos ahora la validez de la fórmula para n

$$(\cos(x))^n = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Ahora veamos que la propiedad se cumple para $n + 1$
tenemos que

$$(\cos(x))^{n+1} = ((\cos(x))^n)' = -\operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \underbrace{=}_{*} \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

(*)La última igualdad la justificamos de la siguiente manera

$\cos\left(x+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{sen}\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$

por lo tanto la fórmula es valida para $n+1$.
Ejemplo.-Hallar $f^{51}(x)$ para $f(x)=\cos(x)$
Tenemos que según la fórmula

$$f^{51}(x)=(\cos(x))^{51}=\cos\left(x+\frac{51\pi}{2}\right)=\cos(x)\cos\left(\frac{51\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{51\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}(x)$$

$$f^{51}(x)=(\cos(x))^{51}=\cos\left(x+\frac{51\pi}{2}\right)=\cos(x)\cos\left(\frac{51\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{51\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}(x)$$

Ejemplo.- Si $f(x)=x^m$
Tenemos que
$f'(x)=mx^{m-1}$
$f''(x)=m(m-1)x^{m-2}$
$f'''(x)=m(m-1)(m-2)x^{m-3}$
Esto sugiere la fórmula

$$f^n(x)=\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$$

Calcular $f^8(x)$ para $f(x)=x^{12}$
Tenemos que:

$$f^{12}(x)=\left(x^{12}\right)^{12}=\frac{8!}{(12-8)!}x^4=19958400x^4$$

Ejemplo.- Si $f(x)=\ln(x)$
Tenemos que
$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f'''(x)=\frac{2}{x^3}$
Esto sugiere la fórmula

$$f^n(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

Calcular $f^{35}(x)$ para $f(x)=\ln(x)$
Tenemos que:

$$f^{35}(x)=(-1)^{34}\frac{34!}{x^{35}}=\frac{295232799039604140847618609643520000000}{x^{35}}$$

Ejemplo.- Si $f(x)=\frac{1}{x}$
Tenemos que
$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f''(x)=\frac{2}{x^3}$
$f'''(x)=-\frac{6}{x^4}$
Esto sugiere la fórmula

$$f^n(x)=\frac{(-1)^n(n)!}{x^{n+1}}$$

Calcular $f^{12}(x)$ para $f(x) = \frac{1}{x}$
Tenemos que:

$$f^{12}(x) = (-1)^{12}\frac{12!}{x^{13}} = \frac{479001600}{x^{13}}$$

Ejemplo.- Si $f(x) = x^{-m}$
Tenemos que
$f'(x) = -mx^{-m-1}$
$f''(x) = -m(-m-1)x^{-m-2}$
$f'''(x) = -m(-m-1)(-m-2)x^{-m-3}$
Esto sugiere la fórmula

$$f^n(x) = (-1)^n\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}x^{-m-n}$$

Calcular $f^{12}(x)$ para $f(x) = x^{-5}$
Tenemos que:

$$f^{12}(x) = (-1)^{12}\frac{16!}{(4)!}x^4 = 871782912000x^{-17}$$

Teorema 1. *Si $f^n(a)$ y $g^n(a)$ existen, entonces*

$$(f\cdot g)^n(a) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^k(a)\cdot g^{n-k}(a)$$

Demostración. La prueba es por inducción, asi que para $n = 1$ se tiene que

$$(f\cdot g)^1(a) = (f\cdot g)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a) = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}f^k(a)\cdot g^{n-k}(a)$$

por lo tanto es valida para la base de inducción
Supóngo valida la propiedad para n

$$(f\cdot g)^n(a) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^k(a)\cdot g^{n-k}(a)$$

y probaremos su validez para $n+1$, para esto tenemos que:

$$(f\cdot g)^{n+1}(a) = ((f\cdot g)^n(a))' = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^k(a)\cdot g^{n-k}(a)\right)' = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^k(a)\cdot g^{n-k}(a)\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{k+1}(a)g^{n-k}(a) + f^k(a)g^{n-k+1}(a)\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{k+1}(a)g^{n-k}(a) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^k(a)g^{n-k+1}(a)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^k(a)g^{n-k+1}(a) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^k(a)g^{n-k+1}(a)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}f^k(a)g^{n-k+1}(a) + f^{n+1}(a)g(a) + f(a)g^{n+1}(a) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^k(a)g^{n-k+1}(a)$$

$$= f(a)g^{n+1}(a) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{k}(a)g^{n-k+1}(a) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{k}(a)g^{n-k+1}(a) + f^{n+1}(a)g(a)$$

$$= f(a)g^{n+1}(a) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{k}(a)g^{n-k+1}(a) + f^{n+1}(a)g(a)$$

$$= f(a)g^{n+1}(a) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{k}(a)g^{n-k+1}(a) + f^{n+1}(a)g(a)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} f^{k}(a)g^{n-k+1}(a) + f^{n+1}(a)g(a) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{k}(a)g^{n-k+1}(a)$$

Vamos a comprobar

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{kn!}{(k)!(n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$$

$\square$

Ejemplo.-Vamos a hallar la derivada n-ésima de $f(x) = x\operatorname{sen}(x)$, para esto se tiene que según la fórmula

$$(x\operatorname{sen}(x))^{n} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{k} \operatorname{sen}^{n-k}(x) = \binom{n}{0} x\,(\operatorname{sen}(x))^{n}+\binom{n}{1} x(\operatorname{sen}(x))^{n-1} = x\left(\operatorname{sen}\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right)+n\left(\operatorname{sen}\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Usaremos lo anterior para hallar $f^{13}(x)$ para $f(x) = x\operatorname{sen}(x)$, para esto se tiene que:

$$f^{13}(x) = (x\operatorname{sen}(x))^{13} = x\operatorname{sen}\left(x+\frac{13\pi}{2}\right) + 13\operatorname{sen}\left(x+\frac{13\pi}{2}\right) = x\operatorname{sen}(x) + 13\cos(x)$$