Números Naturales $\mathbb{N}$

Definir a los números naturales no es una tarea sencilla, la teoría de conjuntos nos dice que se puede dar una representación de los números naturales como sigue:

$0 = \emptyset$

$1 = \emptyset \bigcup \{0\}$

$2 = \{\emptyset, \{0\}$

$3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$4 = \{0, 1, 2, 3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

$\ldots$

Definición 1. *Decimos que un conjunto X es transitivo si $\forall\ y \in X,\ y \subset X$*

La definición anterior sugiere que todos los naturales son transitivos. Por otro lado no todo conjunto transitivo es natural por ejemplo

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

Se puede definir una relación de orden, es decir $\forall\ a, b \in \mathbb{N}$

$a \leq b \Leftrightarrow a \subseteq b$ ó $a \leq b \Leftrightarrow a \in b$

en palabras dice que un número a es menor o igual a un número b si y solo si b contiene a todos los elementos de a.

Principio de buena ordenación

Todo conjunto no vacío de números naturales tiene elemento mínimo

Definición 2. *(**Conjuntista**). Un conjunto X es un número natural si:*

a) X es transitivo

b) $\in_x$ (La pertenencia en X)es un orden en X

c)Todo subconjunto no vacio de X tiene un elemento mínimo.

Definición 3. *Se dice que un conjunto A es inductivo cuando verifica las dos condiciones siguientes:*

a) $1 \in A$

b) $x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$

Tenemos que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^+$ son conjuntos inductivos, por lo que podemos definir al conjunto de los números naturales como la intersección de todos los conjuntos inductivos de $\mathbb{R}$

Teorema 1. $\mathbb{N}$ *es inductivo*

Demostración. Como 1 pertenece a todo conjunto inductivo de $\mathbb{R}$ entonces $1 \in \mathbb{N}$
Si $n \in \mathbb{N}$ y A es un subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$ tenemos $n \in \mathbb{N} \subset A$ por lo que $n + 1 \in A$ por ser A inductivo. Así que $n + 1$ pertenece a todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ es decir $n + 1 \in \mathbb{N}$ □