# Números Naturales parte 2

**Teorema 1.** *El principio del buen orden implica el principio de inducción*

*Demostración.* Sea $A \subset \mathbb{N}$ tal que

a) $1 \in A$

b) Si $n \in A$ entonces $n+1 \in A$

Supongamos que $\mathbb{N} \neq A$

Sea $B = N - A$ el conjunto de números naturales que no están en A. Si $A \neq \mathbb{N}$, entonces $B \neq \emptyset$. Luego, por el Principio del Buen Orden, B tiene un elemento más pequeño. Sea $m \in B$ el elemento más pequeñoo de B. Observar que $m \neq 1$ porque $1 \in A$. Por lo tanto, $m > 1$ y podemos escribir $m = (m-1)+1$, y $m-1 \in \mathbb{N}$. Observar que $m-1 \notin B$ porque el número más pequeño en B es m. Por lo tanto, $m-1 \in A$ y entonces $m = (m-1)+1 \in A$. Esto contradice la suposición m es el elemento más pequeño de B. □

**Teorema 2.** *El principio de inducción implica el principio del buen orden*

*Demostración.* Sea A un subconjunto de números naturales. El Principio del buen orden dice: $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists m \in A, \forall n \in A, m < n$ Esto dice $P \Rightarrow Q$, lo cual es equivalente a $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Es decir, $\forall m \in A, \exists n \in A, m \geq n \Rightarrow A = \emptyset$ Supongamos que $\neg Q$. Es decir, que, $\forall m \in A, \exists n \in A, m \geq n$ Sea B el subconjunto de N tal que $1, 2, ..., k$ no pertenecen a A. Observar que $1 \in B$. (Porque $1 \in A \Rightarrow \forall n \in A, 1 < n$ ). Observar que si $1, 2, ..., k$ están en B, entonces $k+1 \in B$. (Porque $k+1 \in A$ con $1, 2, ..., k$ en B $\Rightarrow \forall n \in A, k+1 < n$). Por el Principio de Inducción Matemática, $B = \mathbb{N}$. Por lo tanto $A = \emptyset$. (Es decir, P) □

Axiomas de Peano

1.- El número 1 es un número natural

2.-Si n es un número natural, entonces el sucesor de n también lo es

3.-El 1 no es sucesor de ningún número natural

4.-Si m y n tienen el mismo sucesor entonces $m = n$

5.-Si $1 \in A$ y si $n \in A$ entonces $n+1 \in A$, se tiene entonces que A es precisamente el conjunto de los número naturales.

Definimos una operación binaria $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$(suma) de la siguiente forma

a) $0 + m = m$

$b)(m+1) + n = (m+n) + 1$

Propiedades de las opraciones

$A_1$ Asociatividad $\forall$ m,n,p$\in \mathbb{N}$

$$m + (n+p) = (m+n) + p$$

*Demostración.* Sean $n, p \in \mathbb{N}$ fijos y sea

$$M = \{m \in \mathbb{N} | m + (n+p) = (m+n) + p\}$$

y vamos a probar que $M = \mathbb{N}$ usando el principio de inducción, tenemos que

$0 \in M$ pues $0 + (n+p) = (0+n) + p$.

Supongamos que $m \in M$ entonces

$$(m+1)+(m+p) = [m+(n+p)]+1 = [(m+n)+p]+1 = [(m+n)+1]+p = [(m+1)+n]+p$$

por lo que $m+1 \in M$ por lo tanto $M = \mathbb{N}$ $\square$

$A_2$. Conmutatividad. Para todo $m, n \in \mathbb{N}$,m+ n = n + m.

*Demostración.* Primero, para $m \in \mathbb{N}$ fijo probaremos que

$$S(n) + m = n + S(m)$$

para todo $n \in N$. Procediendo por induccióon, es cierto para 0 pues $S(0) + m = S(0+m) = 0 + S(m)$. Luego suponiendo que es cierto para $n \in \mathbb{N}$, dado que $S(S(n)) + m = S(S(n)+m) = S(n+S(m)) = S(n) + S(m)$, la ecuación es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, para $n \in \mathbb{N}$ fijo, sea $Mn = \{m \in \mathbb{N} | m + n = n + m\}$. Si $m \in Mn$, entonces $S(m) + n = S(m+n) = S(n+m) = S(n) + m = n + S(m)$ , esto implica que $S(m) \in Mn$. Finalmente, es claro que

$0 \in M0$, y dado que $S(m) \in M0$ si $m \in M0$, entonces $M0 = N$. También como $0 \in Mn$, y puesto que $m \in Mn$ implica $S(m) \in Mn$, entonces, por el principio de inducción, $Mn = N$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $A_2$ esta probada. $\square$

$A_3$ Ley de Cancelación. Para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$, $m + p = n + p \Rightarrow m = n$. Probaremos equivalentemente que si $m \neq n \Rightarrow m + p \neq n + p$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Claramente $0 \in \{p \in \mathbb{N} : m+p \neq n+p\}$; luego supongamos que p es un miembro de este conjunto, entonces $m+pneqn+p$, por lo cual se sigue que $S(m+p) \neq S(n+p)$, que es equivalente a $S(m)+p \neq S(n)+p$; o bien aplicando la ecuación ,$m + S(p) \neq n + S(p)$.