Números Reales $\mathbb{R}$

<u>Def:</u> El conjunto de los números Reales consta de:

Un Conjunto $\mathbb{R}$

Una operación $+: \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \ \mathbb{R}$ llamada `Suma`

Una operación $\cdot : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ llamada `Producto`

Un subcojunto P de $\mathbb{R}$ llamado de `Números Positivos`

Que cumplen:

Ley asociativa para la suma

(P1) $a + (b + c) = (a + b) + c \ \ \forall \ a, b, c \in \mathbb{R}$

Existencia de una identidad para la suma

(P2) $\exists \ 0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a \ \ \forall \ a \in \mathbb{R}$

Existencia de inversos para la suma

(P3) $\forall \ a \in \mathbb{R} \ \exists - a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Ley conmutativa para la suma

(P4) $a + b = b + a \ \ \forall \ a, b \in \ \mathbb{R}$

Ley asociativa para la multiplicación

(P5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \ \ \forall \ a, b, c \in \ \mathbb{R}$

Existencia de una identidad para la multiplicación

(P6) $\exists \ 1 \in \mathbb{R}$ tal que $1 \neq 0$ y $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \ \forall \ a \in \mathbb{R}$

Existencia de inversos para la multiplicación

(P7) $\forall \ a \in \mathbb{R} - \{0\} \ \exists \ a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

Ley conmutativa para la multiplicación

(P8) $a \cdot b = b \cdot a \ \ \forall \ a, b \in \ \mathbb{R}$

Ley distributiva

(P9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \ \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$

(P10) $\forall\, a \in \mathbb{R}$ se cumple una y sólo una de las siguientes proposiciones:

Ley de tricotomía

$(\imath) a = 0 \quad (\imath\imath) a \in P \quad (\imath\imath\imath) - a \in P$

La suma de positivos es cerrada

(P11) $a, b \in P \quad \Rightarrow \quad a + b \in P$

La multiplicación de positivos es cerrada

(P12) $a, b \in P \quad \Rightarrow \quad a \cdot b \in P$

Teorema 1. *El cero es único.*

Demostración. Si hubiera dos 0_1 y 0_2 se verificaría

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$$

$\square$

Teorema 2. *El inverso aditivo es único.*

Demostración. Si hubiera dos y_1 y y_2 se verificaría $x + y_1 = x + y_2 = 0$ por lo tanto

$$y_2 = 0 + y_2 = (x + y_1) + y_2 = x + (y_1 + y_2) = x + (y_2 + y_1) = (x + y_2) + y_1 = 0 + y_1 = y_1$$

$\square$

Teorema 3. *El neutro multiplicativo es único.*

Demostración. Si hubiera dos y_1 y y_2 se verificaría

$$y_1 = y_1 \cdot y_2 = y_2 \cdot y_1 = y_2$$

$\square$

Teorema 4. *El inverso multiplicativo es único.*

Demostración. Si hubiera dos y_1 y y_2 se verificaría $x \cdot y_1 = x \cdot y_2 = 1$ por lo tanto

$$y_2 = 1 \cdot y_2 = (x \cdot y_1) \cdot y_2 = x \cdot (y_1 \cdot y_2) = x \cdot (y_2 \cdot y_1) = (x \cdot y_2) \cdot y_1 = 1 \cdot y_1 = y_1$$

$\square$

Teorema 5. *Si $a + c = b + c$ entonces $a = b$*

Demostración. Por (P2) $a = a + 0$ Por (P3) $\Rightarrow$ $= a + (c + (-c))$ Por (P1) $\Rightarrow$ $= (a + c) + (-c)$
Por hipótesis: $= (b + c) + (-c)$ Por (P1) $\Rightarrow$ $= b + (c + (-c))$ Por (P2) $\Rightarrow$ $= b + 0 = b$
$\therefore \quad a = b$ $\square$

Teorema 6. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $a+x = b$. Este x se designa $x = b-a$*

Demostración. Tenemos que

$$x = x + 0 = x + (a + (-a)) = (x + a) + (-a) = (a + x) + (-a) = b + (-a) = b - a$$

$\square$

Teorema 7. *b-a=b+(-a)*

Demostración. Sea $x = b - a$ y sea $y = b + (-a)$ demostraremos que $x = y$ Tenemos que por definición $x = b - a \Rightarrow x + a = b$ por lo tanto

$$y + a = (b + (-a)) + a = b + (a + (-a)) = b + 0 = b$$

por lo tanto $x + a = y + a \Rightarrow x = y$ $\square$

Teorema 8. *Si $a + d = a \ \ \forall \ a \in \mathbb{R}$ entonces $d = 0$*

Demostración. Por (P2) $d = d + 0$ Por (P3) $\Rightarrow$ $= d + (a + (-a))$ Por (P1) $\Rightarrow$ $= (d + a) + (-a)$
Por (P8) $\Rightarrow$ $= (a + d) + (-a)$ Por Hipótesis $= a + (-a)$ Por (P3) $\Rightarrow$ $= 0$ $\therefore \quad d = 0$ $\square$

Teorema 9. *Dado* $a \in \mathbb{R}$ *si* $a + d = 0$ *entonces* $d = -a$

Demostración. Por (P2) $d = d + 0$ Por (P3) $\Rightarrow$ $= d + (a + (-a))$ Por (P1) $\Rightarrow$ $= (d + a) + (-a)$

Por (P8) $\Rightarrow$ $= (a + d) + (-a)$ Por Hipótesis $= 0 + (-a)$ Por (P2) $\Rightarrow$ $= -a$ $\therefore$ $d = -a$ □

Teorema 10. $-(-a) = a \;\; \forall\, a \in \mathbb{R}$

Demostración. Tenemos $-(-a) + (-a) = 0$ Haciendo $r = -a$ $\Rightarrow$ $-r + r$ Por (P3) $\Rightarrow = 0$ $\therefore$ $-(-a) = a$ □

Teorema 11. *Si* $x \neq 0$ *y* $xy = xz$ *entonces* $y = z$

Demostración. $y = y \cdot 1 = y \cdot (x \cdot x^{-1}) = (yx) \cdot x^{-1} = (xz)x^{-1} = z(xx^{-1})z \cdot 1 = z$ □

Teorema 12. *Si* $ad = a \;\; \forall\, a \neq 0$ *entonces* $d = 1$

Demostración. Por (P6) $d = d{\cdot}1$ Por (P7) $\Rightarrow$ $= d(a(a^{-1}))$ Por (P5) $\Rightarrow$ $= (da)(a^{-1})$ Por (P8) $\Rightarrow$ $= (ad)(a^{-1})$ Por Hipótesis $= a(a^{-1})$ Por (P7) $\Rightarrow$ $= 1$

$\therefore$ $d = 1$ □

Teorema 13. *Sea* $a \neq 0$ *si* $ad = 1$ *entonces* $d = a^{-1}$

Demostración. Por (P6) $d = d{\cdot}1$ Por (P7) $\Rightarrow$ $= d(a(a^{-1}))$ Por (P5) $\Rightarrow$ $= (da)(a^{-1})$ Por (P8) $\Rightarrow$ $= (ad)(a^{-1})$ Por Hipótesis $= 1(a^{-1})$ Por (P6) $\Rightarrow$ $= a^{-1}$

$\therefore$ $d = a^{-1}$ □

Teorema 14. *Si* $x \neq 0$ *entonces* $(x^{-1})^{-1} = x$

Demostración. Tenemos que $x \cdot (x^{-1}) = 1$ y y $(x^{-1})^{-1} \cdot x^{-1} = x$ por lo tanto x y $(x^{-1})^{-1}$ son inversos multiplicativos de $(x^{-1})^{-1}$ y por unicidad del inverso entonces $(x^{-1})^{-1} = x$ □

Teorema 15. $a \cdot 0 = 0 \;\; \forall\, a \in \mathbb{R}$

Demostración. Por (P2) $a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$ Por (P3) $\Rightarrow$ $= a \cdot 0 + (a + (-a))$ Por (P1) $\Rightarrow$ $= (a \cdot 0 + a) + (-a)$

Por (P6) $\Rightarrow$ $= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a)$ Por (P9) $\Rightarrow$ $= a(0 + 1) + (-a)$

Por (P2) y (P6) $\Rightarrow$ $= a + (-a)$ Por (P3) $\Rightarrow$ $= 0$ $\therefore$ $a \cdot 0 = 0$ □

Teorema 16. *Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$ entonces $xy \neq 0$*

Demostración. Supónga $xy = 0$ y $x \neq 0$ y $y \neq 0$ tenemos entonces que

$$1 = xx^{-1}yy^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} = 0 \cdot x^{-1}y^{-1} = 0$$

lo cual es absurdo $\therefore$ $xy \neq 0$ □

Teorema 17. $(-a)b = -(ab)$

Demostración. Usando el resultado $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ tenemos que

$$ab + (-a)b = (a + (-)a)b = 0 \Rightarrow (-a)b = -(ab)$$

□

Teorema 18. $a(-b) = -(ab)$ *(Mas por menos, da menos)*

Demostración. Usando el resultado $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ tenemos que

$$ab + a(-b) = a(b + (-b)) = 0 \Rightarrow a(-b) = -(ab)$$

□

Teorema 19. $(-a)(-b) = ab \ \ \forall \ a, b \in \mathbb{R}$

Demostración.

$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-ab) = ab$$

□