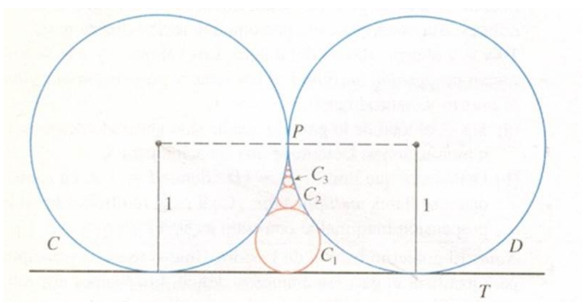
1

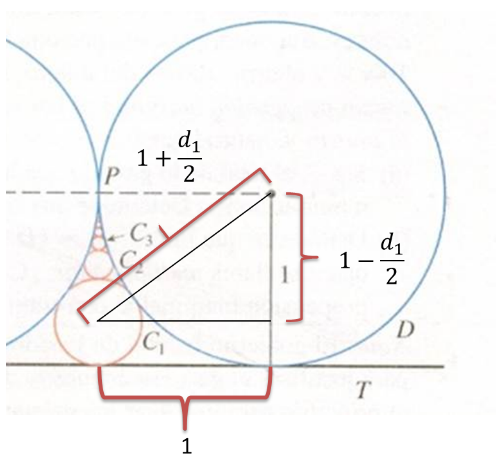
Series parte 2

Ejemplos de Series

Ejemplo.- Se tienen dos círculos C y D de radio 1 que se tocan en P. T es una tangente común; C_1 es el circulo que toca a C, D y T; C_2 es el círculo que toca D, C y C_1; C_3 es el círculo que toca D, C y C_2. Este procedimiento puede continuar en forma indefinida y produce una sucesión infinita de círculos $\{C_n\}$. Determine $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} D(C_n)$ donde $D(\{C_n\})$ se refiere a los diametros de los círculos



Vamos a tomar C_1 y consideramos el triángulo rectángulo desde C_1

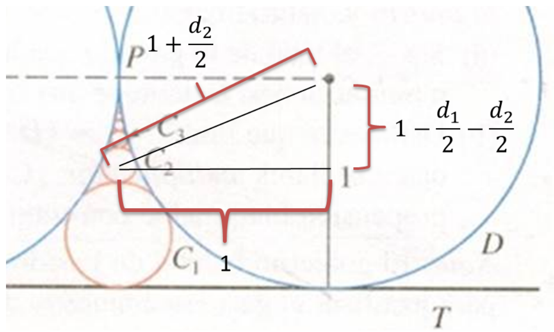


se tiene entonces que

$$1^2+\left(1-\frac{d_1}{2}\right)^2=\left(1+\frac{d_1}{2}\right)^2 \Rightarrow 1=\left(1+\frac{d_1}{2}\right)^2-\left(1-\frac{d_1}{2}\right)^2 \Rightarrow 1=\left(1+\frac{d_1}{2}+1-\frac{d_1}{2}\right)\left(1+\frac{d_1}{2}-1+\frac{d_1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad d_1 = \frac{1}{2}$$

Procedemos de igual forma con C_2 y consideramos el triángulo rectángulo desde C_2



se tiene entonces que

$$1^2 + \left(1 - \frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{d_2}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = \left(1 + \frac{d_2}{2}\right)^2 - \left(1 - \frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$1 = \left(1 + \frac{d_2}{2} + 1 - \frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2}\right)\left(1 + \frac{d_2}{2} - 1 + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad 1 = (2 - d_1)(d_1 + d_2)$$

tomando en cuenta que $d_1 = \frac{1}{2}$ se tiene que

$$1 = (2 - d_1)(d_1 + d_2) \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{1}{6}$$

continuando este proceso se tiene que

$$d_1 = \frac{1}{2}, \quad d_2 = \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad d_3 = \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \cdot 4}, \cdots, d_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

ahora para calcular la serie que se pide en este caso tenemos que:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_n \underbrace{=}_{*} \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

*

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

...

$$S_n = S_3 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + ... + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

Criterios de Convergencia de Series

Teorema 1. *Criterio General de Convergencia La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge si y solo si dado* $\epsilon > 0$ *cualquiera, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall\ n > m > n_0$ *se satisface*

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \epsilon$$

Demostración. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces existe $\lim_{n\to\infty} S_n$ y por lo tanto $\{S_n\}$ es de Cauchy por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ \ n > m > n_0$ se tiene

$$|S_n - S_m| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \epsilon$$

$\square$

Ejemplo.-Aplicando el Criterio General de convergencia, muestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente

En este caso se tiene que

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} \right| = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{<}_{\frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} < \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdots 2} = \frac{1}{2^{k-1}}} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m}}\right) < \frac{1}{2^m}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{2^m}$$

ahora bien

$$\frac{2}{2^m} < \epsilon \ \Leftrightarrow\ \frac{2}{\epsilon} < 2^m \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{2}{\epsilon}\right) < m\ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln\left(\frac{2}{\epsilon}\right)}{\ln(2)} < m$$

por lo tanto hacemos $n_0 = \frac{\ln\left(\frac{2}{\epsilon}\right)}{\ln(2)}$ y por lo tanto $\forall\ n > m > n_0$ se cumple $|S_n - S_m| < \epsilon$

Teorema 2. .- *Criterio de Acotación Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tiene términos no negativos, converge si, y solo si, la sucesión de sumas parciales es acotada.*

Demostración. La sucesión de sumas parciales es no decreciente y de aqui que tiene limite si, la sucesión es acotada. $\square$

Esta condición es necesaria pero no suficiente

Ejemplo.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ no converge pues $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\ \nexists$ sin embargo la sucesión de sumas parciales es acotada.

Teorema 3. *Criterio de Comparación Si $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$. Si existe una constante $C > 0$ tal que $a_n \leq Cb_n$ $\forall n$ entonces la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Demostración. Sea $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ y $t_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$ sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ respectivamente, por hipótesis $S_n \leq Ct_n$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge sus sumas parciales estan acotadas, si M es una cota, se tiene que $S_n \leq CM$ y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es también convergente puesto que sus sumas parciales estan acotadas por CM.

Análogamente la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ □

Ejemplo.-Tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen}^2(n^3)}{2^n+n^2}$ es convergente pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen}^2(n^3)}{2^n+n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n+n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 3$$

esta última es una serie geometrica de razón $r = \frac{1}{2}$ la cual es convergente, por lo tanto por comparación la serie original es convergente