Guia 1

Sumas Inferiores y Sumas Superiores

1.-Dada la función $f(x) = 1 + 2x$, si $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, calcular $\underline{S}(f, P)$ y $\overline{S}(f, P)$. Utilizar lo anterior para calcular

$$\underline{\int_a^b} (1 + 2x)$$

2.-Probar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable en $[a, b]$, con $a, b > 0$

3.-Demostrar que

$$\int_1^a \frac{1}{t} + \int_1^b \frac{1}{t} = \int_b^{ab} \frac{1}{t}$$

4.-Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$. Probar que

$$\left(\int_a^b f \cdot g\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right) \cdot \left(\int_a^b g^2\right)$$

5.-Usando integrales calcular los siguientes limites:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + ... + \frac{n-1}{n^2}\right)$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}} \quad p > 0$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{1}{1^2 + n^2} + \frac{1}{2^2 + n^2} + ... + \frac{1}{n^2 + n^2}\right)$$

6.-Sea f una función continua en el intervalo $[-a, a]$.
Si f es par, probar que

$$\int_{-a}^a f = 2\int_0^a$$

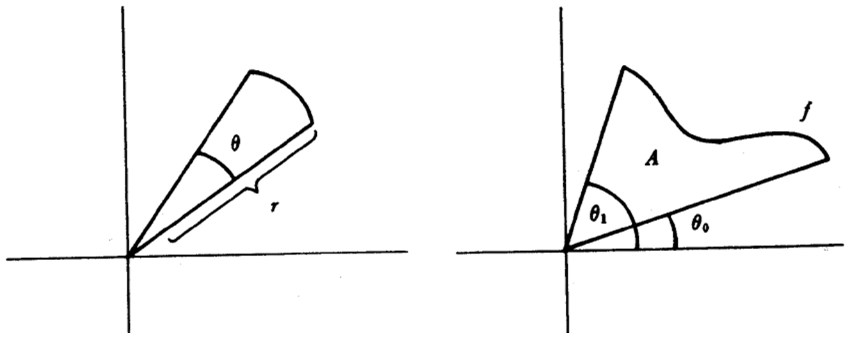
Si f es impar, probar que

$$\int_{-a}^a f = 0$$

7.-Probar que f es integrable en todo $\mathbb{R}$ y periódica de periodo T, entonces

$$\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$$

8.-La figura muestra un sector circular con ángulo central θ



el área de este sector es $\dfrac{r^2\theta}{2}$ cuando se mide θ en radianes. Consideremos la región A donde la curva es la gráfica en coordenadas polares de la función continua f. Demostrar que

$$\acute{a}rea\ de\ A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta)$$

9.-Supóngase que f es integrable sobre $[a, b]$.Demostrar que existe un número $x \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^x f = \int_x^b f$$