Continuación 2: Sumas Superiores e inferiores (ó Sumas de Riemann)

Teorema 1. *Suponga que f es una función acotada sobre $[a,b]$, y sea $L \in \mathbb{R}$. Si existe una sucesión de particiones $\{P_n\} \in P_{[a,b]}$ tal que*

$$\underline{S}(f,P_n) \to L \quad \textit{entonces} \quad \underline{\int_a^b} f \geq L$$

Demostración. Por definición de $\underline{\int_a^b} f$ se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\underline{S}(f,P_n) \leq \underline{\int_a^b} f \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,P_n) \leq \underline{\int_a^b} f \quad \Rightarrow \quad L \leq \underline{\int_a^b} f$$

□

Teorema 2. *Suponga que f es una función acotada sobre $[a,b]$, y sea $L \in \mathbb{R}$. Si existe una sucesión de particiones $\{Q_n\} \in P_{[a,b]}$ tal que*

$$\overline{S}(f,Q_n) \to L \quad \textit{entonces} \quad \overline{\int_a^b} f \leq L$$

Demostración. Por definición de $\overline{\int_a^b} f$ se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\overline{S}(f,Q_n) \geq \overline{\int_a^b} f \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,Q_n) \geq \overline{\int_a^b} f \quad \Rightarrow \quad L \geq \overline{\int_a^b} f$$

□

Teorema 3. *Suponga que f es una función acotada sobre $[a,b]$, y sea $L \in \mathbb{R}$. Si existen sucesiónes de particiones $\{P_n\},\{Q_n\} \in P_{[a,b]}$ tal que*

$$\underline{S}(f,P_n) \to L \quad y \quad \overline{S}(f,Q_n) \to L \quad \textit{entonces} \quad f \quad \textit{es integrable sobre} \quad [a,b] \quad y \quad \int_a^b f = L$$

Demostración. Según los resultados anteriores

$$L \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq L$$

$\therefore$

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = L$$

por lo tanto f es integrable y $\int_a^b f = L$ □

Ejemplo.-Mostrar que la función $f(x) = x^2$ es integrable sobre $[0,1]$ y encontrar $\int_0^1 f$

Solución.-Considere la sucesión de particiones $\{P_n\}$ de $[0,1]$ dada por $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\}$ con $\Delta_i = \frac{1}{n}$, como f es creciente sobre $[0,1]$ se tiene $m_i = f(x_{i-1})$ y $M_i = f(x_i)$ entonces

$$\overline{S}(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{n} i^2 = \left(\frac{1}{n^3}\right)\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{3}$$

por otro lado

$$\underline{S}(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \left(\frac{1}{n^3}\right)\left(\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ según el resultado anterior

$$\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$$

Integrabilidad de las funciones monotonas

Teorema 4. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona en $[a,b]$. Entonces f es integrable sobre $[a,b]$*

Demostración. Supongáse que f es creciente en $[a,b]$. Sea $P_n = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ $\quad i = 1, 2, \cdots, n$. Como f es creciente en $[x_{i-1}, x_i]$ se tiene que $m_i = f(x_{i-1})$ y $M_i = f(x_i)$ por lo tanto

$$\overline{S}(f,P_n) - \underline{S}(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \left(\frac{b-a}{n}\right)(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1}))$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right)(f(x_n) - f(x_0)) = \left(\frac{b-a}{n}\right)(f(b) - f(a))$$

si se elige $n > \left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)(f(b) - f(a))$ entonces

$$\overline{S}(f,P_n) - \underline{S}(f,P_n) = \left(\frac{b-a}{n}\right)(f(b) - f(a)) < \epsilon$$

por lo tanto f es integrable en $[a,b]$.
El caso f decreciente es analogo. $\square$

Teorema 5. *Si $f : [a, b] \to R$ es una función continua en su dominio, entonces f es integrable en [a,b].*

Demostración. Al ser f continua en un intervalo cerrado f es uniformemente continua en dicho intervalo dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ tal que $|x_i - x_{i-1}| < \delta \Rightarrow |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Considerese una partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de [a,b] tal que $x_i - x_{i-1} < \delta$ para toda i=0,1,...,n y dado que f es continua en $[a, b]$, f alcanza su máximo y su mínimo

Tenemos entonces que:

$$\overline{S}(f, p) - \underline{S}(f, p) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon$$

por lo tanto f es integrable en $[a, b]$ □

Definición 1. *Sea $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ una partición $P \in P_{[a,b]}$. Definimos la norma de una partición P como la longitud del mayor de los subintervalos*

$$\|P\| = máx\{(x_i - x_{i-1}) \mid i = 1, \cdots, n\}$$

Definición 2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f acotada en $[a, b]$. Se dice que f es integrable en $[a, b]$ si y solo si*

$$\lim_{\|P\| \to 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{\|P\| \to 0} \overline{S}(f, P)$$

en tal caso

$$\int_a^b f = \lim_{\|P\| \to 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{\|P\| \to 0} \overline{S}(f, P)$$

Definición 3. *Sumas de Riemann Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f acotada en $[a, b]$ sean $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ y $E = \{\xi_1 \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, ..., n\}$. Definimos las sumas de Riemann de f en $[a, b]$ como:*

$$S(f, P, E) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$