Continuación 3: Sumas Superiores e inferiores (ó Sumas de Riemann)

Teorema 1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a,b]$; entonces existe*

$$\lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(f,P) \quad y \quad \lim_{\|P\|\to 0} \overline{S}(f,P)$$

y ademas

$$\lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(f,P) = \underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{S}(f,P) \mid P \in P_{[a,b]}\}$$

y

$$\lim_{\|P\|\to 0} \overline{S}(f,P) = \overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{S}(f,P) \mid P \in P_{[a,b]}\}$$

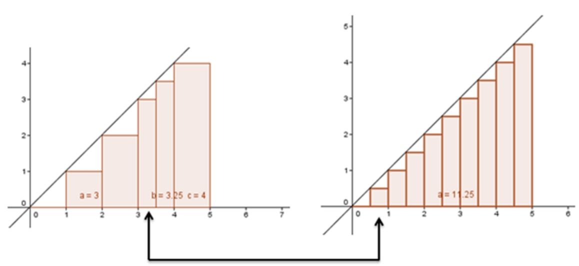
Demostración. Por ser

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{S}(f,P) \mid P \in P_{[a,b]}\}$$

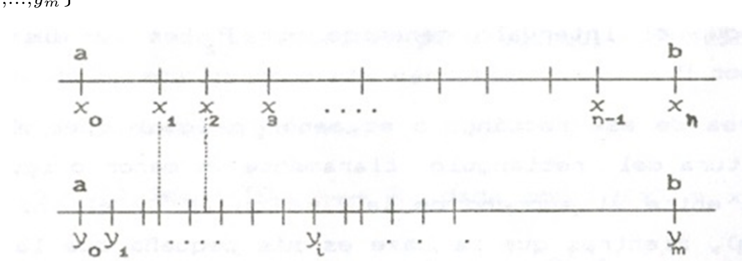
se tiene que $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ P_1 \in P_{[a,b]}$ tal que

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2} < \underline{S}(f,P_1)$$

Con base en P_1 vamos a construir una partición P_2 de tal manera que se cumpla $\|P_2\| = m\acute{\imath}n\{(x_i - x_{x-1})\}$ donde $\{x_{i-1}, x_i\} \in P_1 \ \ \forall\ i = 1, ..., n$

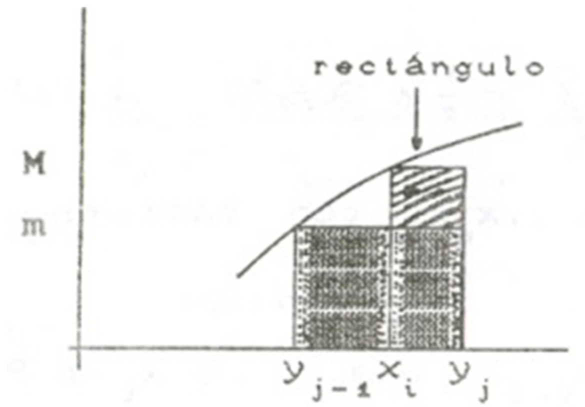


Sea $P_2 = \{y_0, y_{1,...,y_m}\}$



Por construcción hay un número finito de intervalos generados por P_2 que contienen elementos de P_1.
Ahora bien si tomamos $P = P_1 \bigcup P_2$, entonces P es un refinamiento tanto de P_1 como de P_2 y $\|P\| \leq \|P_1\|$ y $\|P\| \leq \|P_2\|$.
Por otro lado tenemos que

$$\underline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P_2) = \acute{a}rea \ \ del \ \ rect\acute{a}gulo$$



y dicho rectangulo tiene área menor o igual que $(M-m)\|P_2\|$, esto ocurre para cada subintervalo de P_2 que contenga elementos de P_1 por lo tanto

$$\underline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P_2) < n(M-m)\|P_2\|$$

si ademas hacemos que $\|P_2\| < \dfrac{\epsilon}{2n(M-n)}$ entonces

$$\underline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P_2) < n(M-m)\|P_2\| < n(M-m)\frac{\epsilon}{2n(M-n)} = \frac{\epsilon}{2}$$

$\therefore \underline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P_2) < \dfrac{\epsilon}{2}$
como P es un refinamiento de P_1

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2} < \underline{S}(f,P_1) \leq \underline{S}(f,P) \quad \Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f - \underline{S}(f,P) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\therefore \quad \underline{\int_a^b} f - \underline{S}(f,P) + \underline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P_2) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

de donde

$$\underline{\int_a^b} f - \underline{S}(f,P_2) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \forall \ \ \epsilon > 0 \ \ \exists \ \ \delta > 0 \ \ \ni \ \ \forall \ \ P_2 \in \ P_{[a,b]}$$

si $\|P_2\| < min\left\{\dfrac{\epsilon}{2n(M-n)}\right\}$ se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f - \underline{S}(f,P_2) < \epsilon$$

y como $\|P\| < \|P_2\| < \delta$

$$\lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(f,P) = \underline{\int_a^b} f$$

La prueba para sumas superiores es analoga $\square$

Vamos ahora a comparar las definiciones vistas en clase y mostraremos su equivalencia

Teorema 2.

$$\left\{\begin{matrix} \text{Una función } f \text{ acotada en } [a,b] \text{ es integrable} \\ \text{sobre } [a,b] \text{ si y solo si} \\ \lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} \overline{S}(f,P) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Una función } f \text{ acotada en } [a,b] \\ \text{es Riemann} - \text{integrable sobre } [a,b] \text{ si y solo si} \\ \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \end{matrix}\right\}$$

Demostración. ($\Rightarrow$)
Por hipótesis

$$\lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} \overline{S}(f,P)$$

como

$$\underline{\int_a^b} f = \lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} \overline{S}(f,P) = \overline{\int_a^b} f$$

entonces

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

($\Leftarrow$)
Por hipótesis si f es integrable

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

y según el resultado anterior

$$\lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(f,P) = \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \lim_{\|P\|\to 0} \overline{S}(f,P)$$

por lo tanto

$$\lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} \overline{S}(f,P)$$

$\square$

Teorema 3. *Sea $f : [a,b] \to R$ acotada en $[a,b]$, f es integrable en $[a,b]$ si y solo si existe*

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,E) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad con \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x-i]$$

Demostración. Por hipótesis f es integrable en $[a,b]$. Vamos a mostrar que

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,E) = \int_a^b f$$

es decir dado $\epsilon > 0$ $\exists 0$ tal que $\forall\ P \in P_{[a,b]}$ con $\|P\| < \delta$ se tiene que

$$\left| S(f,P,E) - \int_a^b f \right| < \epsilon$$

como

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \quad \forall \ \ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \forall\ i = 1,2,...,n$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \quad \forall \ \ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \forall\ i = 1,2,...,n$$
$$\Rightarrow \underline{S}(f,P) \leq S(f,P,E) \leq \overline{S}(f,P)$$
$$\Rightarrow \underline{S}(f,P) - \int_a^b f \leq S(f,P,E) - \int_a^b f \leq \overline{S}(f,P) - \int_a^b f$$

Sea $\epsilon > 0$ como f es integrable $\exists\ \delta_1,\ \delta_2 > 0$ tal que

$$\forall\ P \in P_{[a,b]} \ \ con \ \ \|P\| < \delta \ \Rightarrow \ \left| \underline{S}(f,P) - \int_a^b f \right| < \epsilon \ \Rightarrow \ -\epsilon < \underline{S}(f,P) - \int_a^b f < \epsilon$$

$$\forall\ P \in P_{[a,b]} \ \ con \ \ \|P\| < \delta \ \Rightarrow \ \left| \overline{S}(f,P) - \int_a^b f \right| < \epsilon \ \Rightarrow \ -\epsilon < \overline{S}(f,P) - \int_a^b f < \epsilon$$

si tomamos $\delta = min\{\delta_1 \delta_2\}$ se tiene que

$$-\epsilon < \underline{S}(f,P) - \int_a^b f \quad y \quad \overline{S}(f,P) - \int_a^b f < \epsilon$$

$$\Rightarrow \ -\epsilon < S(f,P,E) - \int_a^b f < \epsilon$$

$$\therefore \quad \left| S(f,P,E) - \int_a^b f \right| < \epsilon \quad si \quad \|P\| < \delta$$

$\square$

Ejemplo.- Encontrar $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}$

Solución.-Sol. Vamos a usar una partición en forma de progresión geométrica $a_0 = 1$, $a_n = a_0 q^n$ es decir $2 = 1 \times q^n = q^n$ consecuentemente $q = 2^{\frac{1}{n}}$ y escogemos $\xi_i = x_{i-1} = q^{i-1}$; tenemos entonces que

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi)\triangle_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{i-1}}(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{i-1}}(q^i - q^{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{i-1}} q^{i-1}(q-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(q-1) = n(q-1) = n(2^{\frac{1}{n}}-1) = Ln(2)$$

La ultima igualdad se justifica de la siguiente manera :

$$\lim_{x\to\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{x}}(\frac{-1}{x^2})Ln(2)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}}Ln(2) = Ln(2)$$

Por lo tanto

$$\int_1^2 \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} n(2^{\frac{1}{n}}-1) = Ln(2)$$