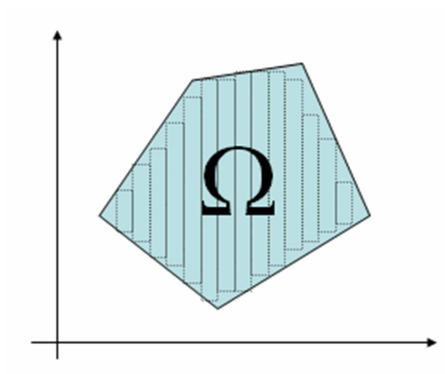
Tema 1

Ejemplos que conducen al concepto de integral definida
(Área bajo una curva, trabajo, etc.)

Área

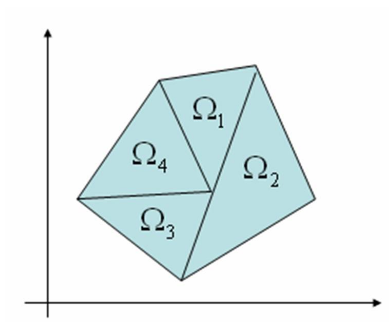


Al definir área aceptaremos que el área $A(\Omega)$ de un conjunto cumple las siguientes propiedades:

1)$A(\Omega) \geq 0$ (El área de un conjunto debe ser un número no negativo)

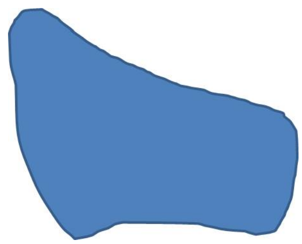
2)Si Ω es un cuadrado de lado K entonces $A(\Omega) = k^2$

3)El área del todo es la suma de sus partes.

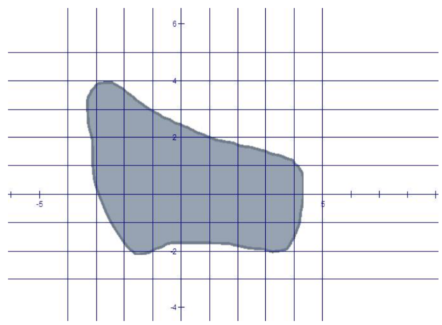


$$A(\Omega) = \sum_{i=1}^{4} A(\Omega_i)$$

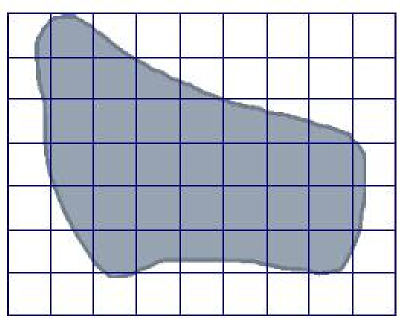
Para definir el área de un conjunto S en plano x,y



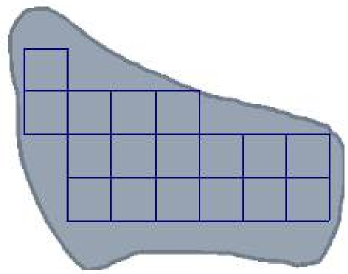
se usan subdivisiones sucesivas del plano en cuadrados definidos por las rectas $x = 0, \pm 1, \pm 2 \pm 3, \cdots$, $y = 0, \pm 1, \pm 2 \pm 3, \cdots$



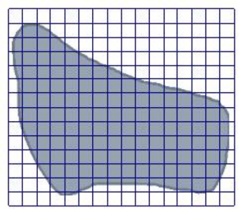
lo cual divide al plano completo en cuadrados de lado 1.
Podemos denotar por $A_0^+(S)$ el número de cuadrados que recubren S



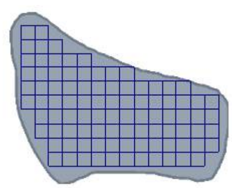
Analogamente denotamos por $A_0^-(S)$ el número de cuadrados que estan completamente contenidos en S



Si dividimos cada cuadrado en cuatro cuadrados iguales de lado $\frac{1}{2}$ y área $\frac{1}{4}$ y denotemos por $A_1^+(S)$ la cuarta parte de aquellos subcuadrados que tienen puntos que cubren a S



y por $A_1^-(S)$ la cuarta parte de aquellos subcuadrados que estan completamente contenidos en S

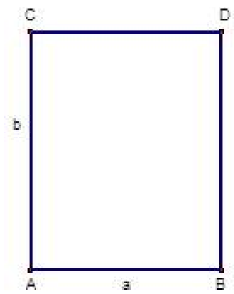


Como cada cuadrado unitario completamente contenido en S da lugar a cuatro subcuadrados completamente contenidos en S, se tiene que $A_0^-(S) \leq A_1^-(S)$ y de manera analoga, $A_0^+(S) \geq A_1^-(S)$. Continuando este proceso se obtiene con los valores de $A_n^+(S)$ una sucesión monotona decreciente y acotada que converge hacia un valor $A^+(S)$, mientras que con los valores de $A_n^-(S)$ formamos una sucesión monotona creciente y acotada que converge hacia un valor $A^-(S)$, donde cada uno de estos valores representa el área exterior y el área interior respectivamente. Diremos que el área de S

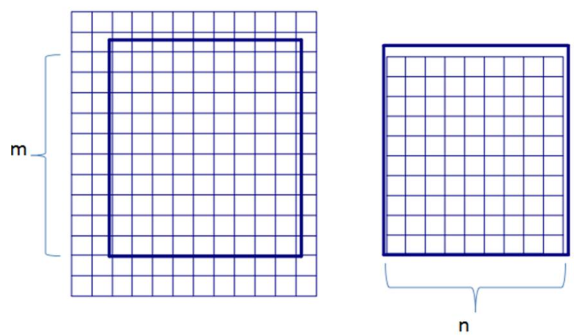
$$A(S) = A^- = \sum_{i,j \subset S} 2^{-2n} = \lim_{n\to\infty} A_n^- = A^+ = \sum_{i,j \cap S \neq \emptyset} 2^{-2n} = \lim_{n\to\infty} A_n^+$$

Proposición 1. *Dado un rectángulo S con lados a,b su área esta determinada por el producto de sus lados.*

Demostración. Dado el rectángulo ABCD



Vamos a formar una red de cuadrados de lado 2^{-n} que cubren al rectángulo. Determinaremos el número de cuadrados que contienen al rectángulo y el número de cuadrados contenidos en el rectángulo



según la figura el número de cuadrados contenidos en el rectángulo será mn, mientras que el número de cuadrados que contienen al rectángulo no será mayor que $(m+1)(n+1)$. De aquí resulta que el área S del rectángulo está comprendida entre

$$\frac{mn}{2^{2n}} \leq S < \frac{(m+1)(n+1)}{2^{2n}}$$

Por otro lado

$$\frac{m}{2^n} \leq b < \frac{m+1}{2^n} \quad y \quad \frac{n}{2^n} \leq a < \frac{n+1}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{mn}{2^{2n}} \leq ab < \frac{(m+1)(n+1)}{2^{2n}}$$

por lo tanto

$$|S - ab| \leq \frac{(m+1)(n+1)}{2^{2n}} - \frac{mn}{2^{2n}}$$

tomando n suficientemente grande se tiene que $S = ab$ □