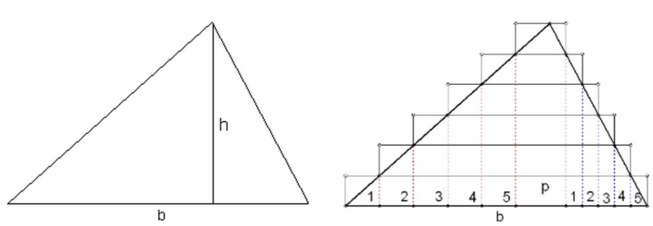
Tema 1

Ejemplos que conducen al concepto de integral definida (Área bajo una curva, trabajo, etc.)

Área parte 2

Usando lo anterior trataremos de probar que el área de un triángulo de base b y altura h es $\dfrac{bh}{2}$

Demostración. Para ello vamos a dividir h en n partes iguales



y cada proyección sobre b genera una partición en n partes iguales (según la figura la partición de b es: {1,1},{2,2},{3,3},{4,4},{5,5},{p} que son el mismo número en que particionamos a h) $\therefore$ sumando todas las áreas de los rectángulos tenemos:

$$b \cdot \frac{h}{n} + \left(b - \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{h}{n} + \left(b - \frac{2b}{n}\right) \cdot \frac{h}{n} + ... = \frac{h}{n}\left[b + \frac{nb-b}{n} + \frac{nb-2b}{n} + ... + \frac{nb-(n-1)b}{n}\right] =$$

$$\frac{bh}{n^2}\left[n + (n-1) + (n-2) + ... + 1\right] = \frac{bh}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

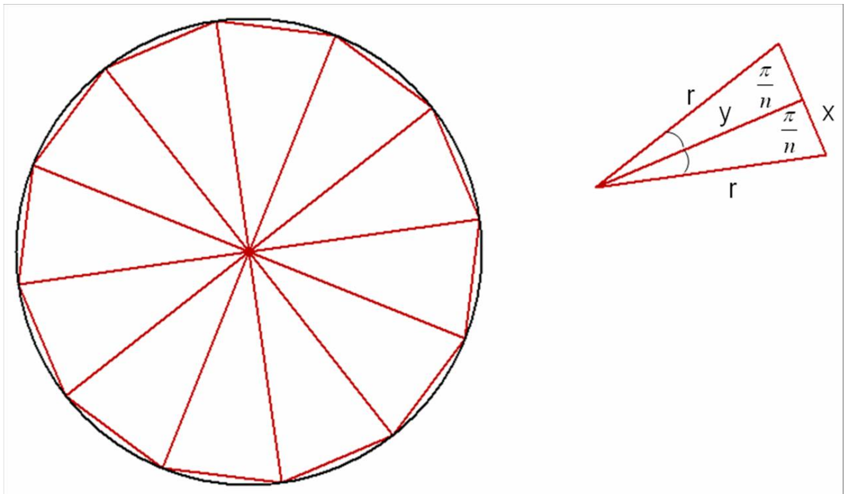
$\therefore$ el área para el triángulo sera:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{bh}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{bh}{2}$$

□

Aproximación del área de una circunferencia

La idea es inscribir un polígono de "n"lados dentro de la circunferencia y extraemos una parte del polígono y calculamos su área



tenemos que

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{y}{r}$$

por lo tanto

$$r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = y$$

Por otro lado

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{x}{r}$$

por lo tanto

$$r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = x$$

Por lo tanto la base del triángulo será $2x = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$ y la altura es $y = r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ por lo tanto el área del triángulo es

$$\frac{base \cdot altura}{2} = \frac{2r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2} = r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Por lo tanto el área del polígono es

$$\sum_{1}^{n} r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = nr^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

tenemos entonces

$$\lim_{n\to\infty} nr^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi \cdot nr^2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \pi r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi r^2$$

Aprovechamos lo anterior para hallar el perimetro del poligono inscrito en la circunferencia, teniamos que la base del triángulo era

$$2x = 2r\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

por lo tanto el perímetro del polígono inscrito es

$$\sum_{1}^{n} 2r\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2nr\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Haciendo n grande tendremos el perímetro del circulo

$$\lim_{n\to\infty} 2nr\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi \cdot 2nr}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi r$$

Ahora bien si $C = 2\pi r$ dividiendo la circunferencia en 360 partes iguales se tiene que la longitud de un arco de 1 grado es

$$\ell = \frac{2\pi r}{360}$$

$\therefore$ la longitud de un arco de n^o será

$$\ell = \frac{2\pi r n^o}{360} \underbrace{=}_{en \quad radianes} r n^o = r\theta$$

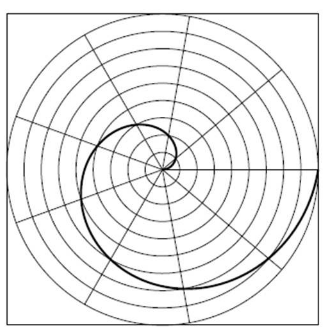
Por otro lado tenemos que el área de un circulo es πr^2 por lo tanto si dividimos el circulo en 360 partes iguales, el area de el sector de amplitud 1 grado sera $\dfrac{\pi r^2}{360}$ y por lo tanto un sector de amplitud n^o sera:

$$\frac{\pi r^2 n^o}{360} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi r^2 n^o}{180} \underbrace{=}_{en \quad radianes} = \frac{1}{2} \cdot r^2 n^o = \frac{1}{2} \cdot r^2\theta$$

Área de una espiral

El siguiente ejemplo de cuadratura sigue un procedimiento que, traducido a las notaciones actuales, es prácticamente el mismo de la integral de Riemann. La espiral de Arquímedes es la curva que describe un punto material que se mueve con velocidad uniforme a lo largo de una semirrecta que gira con velocidad angular uniforme alrededor de su extremo. Es un ejemplo de las llamadas curvas mecánicas. La ecuación polar de una espiral de Arquímedes es de la forma $\rho = a\theta$, donde $a > 0$ es una constante.

Teorema 1. . *El área del primer ciclo de una espiral es igual a una tercera parte del área del círculo circunscrito.*



Demostración. Consideremos una espiral de Arquímedes de ecuación polar $\rho = a\theta$ y calculemos el área cuando el ángulo polar varía desde 0 a 2π, es decir, de la primera vuelta de la espiral. El radio del círculo circunscrito es $2\pi a$. Para ello dividimos este círculo en sectores de amplitud $\theta = \frac{2\pi}{n}$, desde $\theta = \frac{2\pi k}{n}$ a $\theta = \frac{2\pi(k+1)}{n}$ para $k = 0, 1, ..., n.,1$. En cada sector examinamos el arco de espiral que queda dentro del mismo y acotamos el área correspondiente a dicho arco de espiral entre las áreas de dos sectores circulares. Teniendo en cuenta que el área de un sector circular de radio r y amplitud θ radianes es $\frac{1}{2}r^2\theta$, resulta que el área de sector circular más grande inscrito en cada arco de espiral es $\frac{1}{2}\left(a\frac{2\pi k}{n}\right)^2\frac{2\pi}{n}$, y el área de sector circular más pequeño circunscrito a cada arco de espiral es $\frac{1}{2}\left(a\frac{2\pi(k+1)}{n}\right)^2\frac{2\pi}{n}$. Deducimos que el área, S, de la espiral verifica que

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(a\frac{2\pi k}{n}\right)^2\frac{2\pi}{n} < S < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\left(a\frac{2\pi(k+1)}{n}\right)^2\frac{2\pi}{n}$$

$\therefore$

$$\frac{4\pi^3a^2}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 < S < \frac{4\pi^3a^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$\frac{4\pi^3a^2}{n^3}\left(\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6}\right) < S < \frac{4\pi^3a^2}{n^3}\left(\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$\frac{4\pi^3a^2}{6}\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right) < S < \frac{4\pi^3a^2}{6}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)$$

Vamos a restar a cada término de la deesigualdad $\frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2$

$$\frac{4\pi^3a^2}{6}\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2 < S-\frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2 < \frac{4\pi^3a^2}{6}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2$$

factorizando $\frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2$ se tiene

$$\frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)-1\right) < S-\frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2 < \frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-1\right)$$

simplificando

$$\frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2\left(-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right) < S-\frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2 < \frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2\left(\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)$$

Dado que

$$-\frac{2}{n} = -\frac{3}{2n}-\frac{1}{2n} < -\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2} \quad y \quad \frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2} < \frac{3}{2n}+\frac{1}{2n} = \frac{2}{n}$$

Se tiene que

$$\left(-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2 < S-\frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2 < \left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2$$

$\therefore$

$$\left|S-\frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2\right| < \left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2$$

$\therefore$

$$S - \frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2 \to 0$$

$\therefore$

$$S = \frac{1}{3}\pi(2a\pi)^2$$

$\square$