$A \subseteq \mathbb{R}$ acotado, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sup(x+A) = x + \sup A$, $\inf(x+A) = x + \inf A$

ⓐ Sea $a \in A \Rightarrow a \leq \sup A \Rightarrow x + a \leq x + \sup(A)$

es decir, $x + \sup A$ es cota superior de $x + A \Rightarrow \sup(x+A) \leq x + \sup A$ por definición de supremo.

Recíprocamente, $\forall a \in A$ tenemos $\sup(x+A) \geq x + a \Rightarrow$ $\sup(x+A) - x \geq a$, luego, $\sup(x+A) - x$ acota superiormente a A $\Rightarrow \sup A \leq \sup(x+A) - x \iff \sup A + x \leq \sup(x+A)$ $\therefore$

$\boxed{\sup(x+A) = x + \sup A.}$

Si $x > 0 \Rightarrow \sup(xA) = x\sup A$ y $\inf(xA) = x\inf(A)$

ⓑ Sea $x > 0$. Sea $a \in A$, entonces $a \leq \sup A$, como $x > 0 \Rightarrow$ $xa \leq x\sup A \Rightarrow x\sup A$ es cota superior de $xA \Rightarrow$ $\sup(xA) \leq x\sup A$.

Recíprocamente, dado $a \in A$ tenemos $\sup(xA) \geq xa$, como $x > 0$ $\Rightarrow \frac{1}{x}\sup(xA) \geq a$; entonces $\frac{1}{x}\sup(xA)$ acota superiormente a $A \Rightarrow \sup A \leq \frac{1}{x}\sup(xA) \iff \sup(xA) \geq x\sup A$.

$\therefore \boxed{x\sup A = \sup(xA).}$

$\sup(-A) = -\inf A$ y $\inf(-A) = -\sup A$

ⓒ Sea $a \in A \Rightarrow \sup(-A) \geq -a \iff -\sup(-A) \leq a$ es decir, $-\sup(-A)$ es cota inferior de $A \Rightarrow -\sup(-A) \leq \inf A \iff$ $\sup(-A) \geq -\inf A$.

Recíprocamente, dado $a \in A$ $\inf(A) \leq a \iff -\inf(A) \geq -a$ o sea, $-\inf A$ es cota superior de $-A \Rightarrow -\inf(A) \geq \sup(-A)$

$\therefore \boxed{\sup(-A) = -\inf A}$

Si $x < 0 \Rightarrow \sup(xA) = x\inf A$ y $\inf(xA) = x\sup A$

ⓓ Sean $x < 0$ y $a \in A$: tenemos $\inf A \leq a$, como $x < 0 \Rightarrow$ $x\inf A \geq xa$, es decir, $x\inf A$ es cota superior de $xA \Rightarrow$ $\sup(xA) \leq x\inf A$. Recíprocamente, para todo $a \in A$, $\sup(xA) \geq xa$, como $x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x}\sup(xA) \leq a$, es decir, $\frac{1}{x}\sup(xA)$ acota inferiormente a $A \Rightarrow$ $\inf A \geq \frac{1}{x}\sup(xA) \Rightarrow x\inf A \leq \sup(xA)$ $\therefore \boxed{x\inf A = \sup(xA)}$

Definicion de A+B

ⓐ A, B acotado por abajo $\Rightarrow \inf(A+B) = \inf A + \inf B$

ⓑ A, B acotado por arriba $\Rightarrow \sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Dem

A, B acotados por abajo

Sea $A+B = \{a+b \text{ tq } a \in A,\ b \in B\}$

① P.D

$\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$

Sea $x+y \in A+B$, $x \in A$ $x \leq \sup A$, $y \in B$ $y \leq \sup B$

$\Rightarrow x+y \leq \sup A + \sup B \Rightarrow \sup A + \sup B$ es cota superior de $A+B$

$\therefore \sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$

P.D

② $\sup(A+B) \geq \sup A + \sup B$

$\forall\, x \in A,\ y \in B$

$x+y \leq \sup(A+B)$

$x \leq \sup(A+B) - y$ es cota superior de A

$\sup(A) \leq \sup(A+B) - y$

$\sup(A) \leq \sup(A+B) - \sup(B)$

$\therefore \sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$

① Areas

② Sumas

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(i) \text{ que es } \sum_{j=1}^{n} \varphi(j), \sum_{k=1}^{n} \varphi(k)$$

Si $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ son derivables,

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ es derivable

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)$$

Ejemplo:

$$\sum_{i=2}^{5} \frac{2}{3+i}, \quad \sum_{i=4}^{6} \frac{2}{4+i^2},$$

Observaciones

① $\sum_{i=1}^{n} c = nc, \quad \sum_{i=1}^{n} 1 = n$

② $\sum_{i=1}^{n} \alpha \varphi(i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \varphi(i), \quad \alpha \in \mathbb{R}$

③ $\sum_{i=1}^{n} (\varphi(i) + \psi(i)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i) + \sum_{i=1}^{n} \psi(i)$

Ejemplo:

Sumas famosas

(1) $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+ \quad +n = S$

$S_1 = 1+2+ \qquad +n$

$S_1 = n+n-1 \qquad +1$

$2S_1 = n(n+1)$

(2) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+ \quad +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(4) $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

(5) $\sum_{i=0}^{n} r^i = 1+r+r^2+ \quad +r^n = S$

$S - rS = 1 - r^{n+1}$

$S = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$