Continuación 4: Sumas Superiores e inferiores (ó Sumas de Riemann)

Vamos a demostrar
$$\int_a^b \cos(x) = \operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(a)$$

Demostración. Usaremos sumas de Riemann
Sea $P = \{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, ..., a + n\frac{b-a}{n} = b\}$, donde $\xi_i = x_i$ y $\Delta_i = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b \cos(x) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \cos\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

$$\underbrace{=}_{\frac{b-a}{n}=h} \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \cos(a+ih)\,h = \lim_{\|P\|\to 0} \frac{h}{2\operatorname{sen}(h)} \sum_{i=1}^{n} 2\cos(a+ih)\operatorname{sen}(h) =$$

$$\lim_{\|P\|\to 0} \frac{h}{2\operatorname{sen}(h)} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}(a+(i+1)h) - \operatorname{sen}(a+(i-1)h)$$

La última igualdad la justificamos por la identidad

$$2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)$$

tenemos que

$$\operatorname{sen}(a+(i+1)h) - \operatorname{sen}(a+(i-1)h) = 2\cos\left(\frac{a+(i+1)h+a+(i-1)h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+(i+1)h-(a+(i-1)h)}{2}\right)$$

$$2\cos\left(\frac{2(a+ih)}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2h}{h}\right) = 2\cos(a+ih)\operatorname{sen}(h)$$

por lo tanto

$$\lim_{\|P\|\to 0} \frac{h}{2\operatorname{sen}(h)} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}(a+(i+1)h) - \operatorname{sen}(a+(i-1)h) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}} \left(\operatorname{sen}(a+(n+1)h) - \operatorname{sen}(a+h) + \operatorname{sen}(a+nh) - \operatorname{sen}(a)\right) =$$

$$\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(b) + \operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(a)) = \operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(a)$$

□

Teorema 1. *Si f es continua en [a,b] entonces kf es integrable y $\int_a^b kf = k\int_a^b f$ con k una constante arbitraria*

Demostración. Tenemos que por sumas de Riemann

$$\int_a^b kf = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\triangle_{x_i} = k\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle_{x_i} \underbrace{=}_{como\ \ \exists\ \ el\ \ limite\ \ entonces\ \ kf\ \ es\ \ integrable} k\int_a^b f(x)$$

□

Teorema 2. *Si f,g son funciones continuas en [a,b] entonces $f+g$ es integrable y*

$$\int_a^b \{f+g\} = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Demostración. Por sumas de Riemann

$$\int_a^b \{f+g\} = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\{(f+g)(\xi_i))\triangle_{x_i} = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\{(f(\xi_i)+g(\xi_i))\triangle_{x_i}\} = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\{f(\xi_i)\triangle_{x_i}\}+\{g(\xi_i)\triangle_{x_i}\}$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\triangle_{x_i}$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle_{x_i} + \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\triangle_{x_i} = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

□

Proposición 1. *Sea $f:[a,b]\to R$ una función integrable y positiva en su dominio; se cumple*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Demostración. Sea $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ una partición cualquiera de [a,b]; se tiene que $m_i\geq 0$ por lo que

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0$$

Por lo tanto

$$0 \leq \underline{S}(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx$$

□

Vamos a probar la desigualdad

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} \leq 2e^2$$

Tenemos que $f(x)=e^{x^2-x}$, por lo que $f'(x)=e^{x^2-x}(2x-1)$ ahora bien $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ como f' va de - a + en $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$ es punto mínimo, por lo que $m=e^{-\frac{1}{4}}$ y $M=e^2$

Por lo tanto

$$e^{-\frac{1}{4}} \leq e^{x^2-x} \leq e^2 \Rightarrow \int_0^2 e^{-\frac{1}{4}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} \leq \int_0^2 e^2 \Rightarrow 2e^{\frac{1}{4}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} \leq 2e^2$$

Definición 1. *Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces*

$$a)\qquad \int_a^b f = -\int_b^a f$$

Si $f(a)$ existe, entonces

$$b)\qquad \int_a^a f = 0$$

Ejercicio.-Demuestre que si f es integrable sobre $[-a,a]$ y f es par entonces

$$\int_{-a}^{a} f = 2\int_{-a}^{a} f$$

tenemos que

$$\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_{0}^{a} f$$

bastara con probar que $\displaystyle\int_{-a}^{0} f = \int_{0}^{a} f$
para ellos tomamos $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\} = \{-a, -a+\frac{a}{n}, -a+2\frac{a}{n}, ..., -a+n\frac{a}{n} = 0\}$ y vamos a usar sumas de Riemann, en este caso
$f(\xi_i) = x_{i-1} = -a+(i-1)\dfrac{a}{n}$ y $\Delta_i = (x_i - x_{i-1}) = \dfrac{a}{n}$
por lo tanto

$$\int_{-a}^{0} f = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(-a+(i-1)\frac{a}{n}\right)\frac{a}{n} = \lim_{\|P\|\to 0}\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(-a+(i-1)\frac{a}{n}\right)$$

$$\underbrace{=}_{hacemos\quad n-k=i-1}\lim_{\|P\|\to 0}\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(-a+(n-k)\frac{a}{n}\right) = \lim_{\|P\|\to 0}\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{-ka}{n}\right)\underbrace{=}_{f\quad par}\lim_{\|P\|\to 0}\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{ka}{n}\right)$$

$$= \int_0^a f \qquad \Rightarrow \int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_{0}^{a} f = \int_{0}^{a} f + \int_{0}^{a} = 2\int_{0}^{a} f$$