Criterios de Convergencia de las Integrales Impropias parte 2

Algunas de las propiedades de la función Gamma

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por inducción para n=0 se tiene

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-t}dt = -\lim_{b\to\infty} e^{-t}|_1^b = -\lim_{b\to\infty} e^{-b} - 1 = 1 = 0!$$

Suponemos cierto para n=k+1 es decir

$$\Gamma(k+1) = k!$$

Veamos para n=k+1

$$\Gamma(k+2) = \underbrace{\Gamma(k+1+1)}_{Propiedad \quad \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)} = (k+1) \underbrace{\Gamma(k+1)}_{Hip. \quad ind. \quad \Gamma(k+1)=k!} = k+1(k!) = (k+1)!$$

Función Beta

La función Beta de Euler es una expresión de la forma

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

Esta función es convergente para valores $p, q \geq 1$ ya que en ellos la integral no es impropia y el integrando es continuo y por tanto integrable
Para valores $p > 0$ y $0 < q < 1$ tambié es convergente
Para valores $q > 0$ y $0 < p < 1$ tambié es convergente
La identidad que relaciona la función Gamma con la función Beta es:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Ahora bien si en la función Beta hacemos el cambio de variable $x = Sen^2t$ y $dx = 2SentCost$ tenemos entonces que

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (Sen^2t)^{p-1}(1-Sen^2t)^{q-1}2SentCostdt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (Sen^2t)^{p-1}Sent(Cos^2t)^{q-1}Costdt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sen^{2p-1}tCos^{2q-1}dt$$

Vamos a calcular

$$\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sen^{2(\frac{1}{2})-1}tCos^{2(\frac{1}{2})-1}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sen^0tCos^0dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

Mientras que

$$\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}=\frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^2}{\Gamma(1)}=(\Gamma(\frac{1}{2}))^2$$

Por lo tanto

$$(\Gamma(\frac{1}{2}))^2=\pi\Rightarrow\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

Podemos ahora calcular algunos valores de la función

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\underbrace{=}_{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)\underbrace{=}_{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)\underbrace{=}_{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)}\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\frac{3\sqrt{\pi}}{4}=\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$$

Usando la propiedad $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ tenemos que $\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ por lo tanto si $-1<x<0$ $\Gamma(x)$ esta bien definido, por ejemplo

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}$$

para valores $x<-1$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}(-2\sqrt{\pi})=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}}=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{5}{2}}=-\frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\right)=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

Este mecanismo recurrentevpermite concluir que Γ esta bien definida para $\forall\ x<0$ excepto $x\in(Z)$
Ejemplos.-Calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}Sen^5\theta Cos^7\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2Sen^{2(3)-1}\theta Cos^{2(4)-1}d\theta=\frac{1}{2}\beta(3,4)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(3+4)}=\frac{1}{2}\frac{2!3!}{6!}=\frac{1}{120}$$

calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}Cos^6\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}Sen^0\theta Cos^6\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2Sen^{2(\frac{1}{2})-1}\theta Cos^{2(\frac{7}{2})-1}\theta d\theta=\frac{1}{2}\beta(\frac{1}{2},\frac{7}{2})=$$

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{7}{2})}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{15}{2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{8}{2})}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{15}{2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(4)}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{15}{2}\sqrt{\pi}}{3!}=\frac{5\pi}{32}$$

Calcular $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x^3}dx$ tenemos que

$$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x^3}dx \underbrace{=}_{x^3=t} \int_0^\infty t^{\frac{1}{6}}e^{-t}\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt = \frac{1}{3}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Calcular $\int_0^\infty x^6e^{-2x}dx$ tenemos que

$$\int_0^\infty x^6e^{-2x}dx \underbrace{=}_{x=\frac{t}{2}} \int_0^\infty \left(\frac{t}{2}\right)^6 e^{-t}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2^7}\int_0^\infty t^6e^{-t}dt = \frac{1}{2^7}\Gamma(7) = \frac{1}{2^7}6! = \frac{45}{8}$$

Calcular $\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}dx$ tenemos que

$$\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}dx \underbrace{=}_{x^2=a^a t} \int_0^1 a^4t^2\sqrt{a^2-x^2}\frac{a}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt = \int_0^1 a^4t^2\sqrt{a^2\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}\frac{a}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{a^6}{2}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{a^6}{2}\beta\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{a^6}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)} = \frac{a^6}{2}\frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{3!} = \frac{a^6\pi}{32}$$