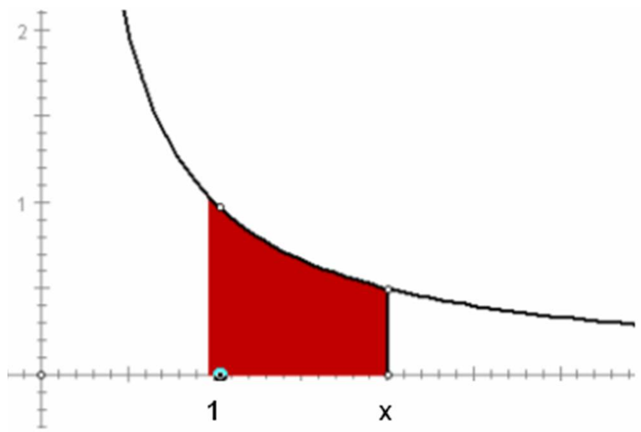
Guia 3 1

Función Logaritmo y Exponencial

Función Logaritmo

Definición 1. *Definimos la función*

$$Log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$



Algunas de las propiedades de esta función son:
a) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
b) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$
c) $\log(x^n) = n\log(x)$
d) $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$
e) $\log(x^r) = r\log(x) \quad \forall\ x\ \in\ \mathbb{Q}$

Demostración. Se probara solo e). Sea r fijo en $\mathbb{Q}$ por la regla de la cadena

$$\log(x^r) = \int_1^{x^r} \frac{1}{t} dt \ \Rightarrow\ (\log(x^r))' = \left(\int_1^{x^r} \frac{1}{t} dt\right)' = \frac{1}{x^r} r x^{r-1} = \frac{r}{x}$$

por otro lado

$$(r\log(x))' = \frac{r}{x}$$

por lo tanto $\log(x^r)$ y $\log(x^r)$ ambas funciones tienen la misma derivada y en consecuencia ambas funciones difieren en una constante, esto es: $\log(x^r) = r\log(x) + C$ si tomamos $x = 1$ se tiene $\log(1) = r\log(1) + C$ por tanto $C = 0$ es decir

$$\log(x^r) = r\log(x)$$

$\square$

Ahora bien

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

si $x > 1$ entonces $\log(x) > 0$ y si $x_1 < x_2$ entonces

$$\log(x_2) - \log(x_1) = \int_1^{x_2} \frac{1}{t}dt - \int_1^{x_1} \frac{1}{t}dt = \int_1^{x_2} \frac{1}{t}dt + \int_{x_1}^{1} \frac{1}{t}dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{t}dt > 0$$

por lo tanto

$$\log(x_2) - \log(x_1) > 0 \;\Rightarrow\; \log(x_2) > \log(x_1)$$

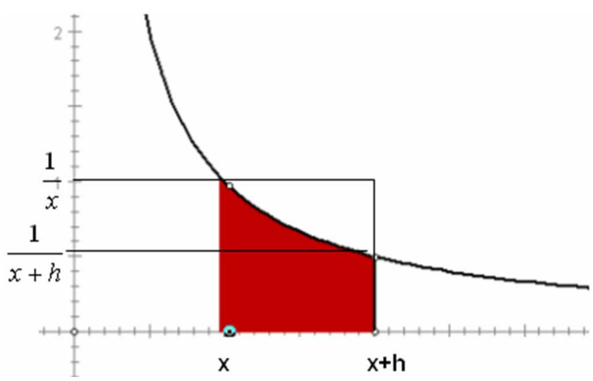
y la función es monotona

Mientras que si $0 < x < 1$ entonces $\log(x) < 0$ y en ese caso para $x_2 < x_1$ se tendra

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{t}dt < 0 \;\Rightarrow\; \int_1^{x_2} \frac{1}{t}dt - \int_1^{x_1} \frac{1}{t}dt < 0 \;\Rightarrow\; \int_1^{x_2} \frac{1}{t}dt < \int_1^{x_1} \frac{1}{t}dt \;\Rightarrow\; \log(x_2) < \log(x_1)$$

y la función es monotona.

Para Calcular F' vamos a proceder por áreas



$$h\frac{1}{x+h} \leq F(x+h) - F(x) \leq h\frac{1}{x}$$

Por tanto

$$h\frac{1}{x+h} \leq Log(x+h) - Log(x) \leq h\frac{1}{x}$$

Dividiendo entre h y tomando limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{x+h} \leq \lim_{h\to 0} \frac{Log(x+h) - Log(x)}{h} \leq \lim_{h\to 0} \frac{1}{x}$$

tenemos

$$\frac{1}{x} \leq \lim_{h \to 0} \frac{Log(x+h) - Log(x)}{h} \leq \frac{1}{x}$$

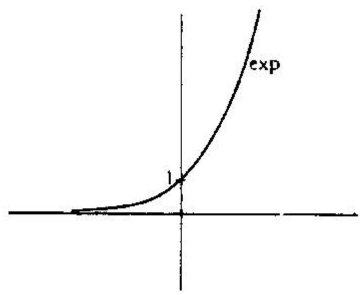
finalmmente

$$(Log(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{Log(x+h) - Log(x)}{h} = \frac{1}{x}$$

El cual es mayor a cero si $x > 0$ por tanto la función es derivable y por tanto continua al ser monotona existe entonces su inversa.

Función Exponencial

Definición 2. *La función exponencial se define como* $(Log)^{-1}$



Algunas de sus propiedades 1.-$(e^x)' = e^x$

Demostración.

$$(e^x)' = (Log(x))' = \frac{1}{Log'(Log^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{Log^{-1}(x)}} = Log^{-1}(x) = e^x$$

□

2.-$e^{x+y} = e^x e^y$

Demostración.

$$Sea \qquad x' = e^x \qquad y' = e^y \qquad por \qquad lo \qquad que \qquad x = Logx' \qquad y = Logy'$$

tenemos entoces que

$$x + y = Logx' + Logy' = Log(x'y') \qquad por \qquad tanto \qquad e^{x+y} = e^{Log(x'y')} = x'y' = e^x e^y$$

□

3.-$e^y = e^{-y}$

Demostración.

$$1 = e^0 = e^{y-y} = e^y e^{-y} \qquad por \qquad tanto \qquad 1 = e^y e^{-y} \Rightarrow \frac{1}{e^y} = e^{-y}$$

□

4.-$e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

Demostración.

$$e^{x+y} = e^x e^y \;\Rightarrow\; e^{x+(-y)} = e^x e^{-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

□

Definición 3. *Si $a > 0$ entonces para cualquier real x definimos*

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}$$

Algunas de sus propiedades 1.-$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$

Demostración.

$$\left(a^b\right)^c = e^{c\ln(a^b)} = e^{c\ln(e^{b\ln(a)})} = e^{c(b\ln(a))} = e^{cb\ln(a)} = a^{cb}$$

□

2.-$a^{x+y} = a^x a^y$

Demostración.

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln(a)} = e^{x\ln(a)+y\ln(a)} = e^{x\ln(a)}e^{y\ln(a)} = a^x a^y$$

□

3.-$a^1 = a$

Demostración.

$$a^1 = e^{1\ln(a)} = e^{\ln(a)} = a$$

□

Integral de Poisson

Vamos a calcular la integral $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ si hacemos el cambio $t = x^2$ tenemos que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-t}(\frac{1}{2})t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt}_{\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dx} = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ahora bien la función $f(t) = e^{-t^2}$ es par ya que $f(-t) = e^{-(-t)^2} = e^{-t^2}$ por lo tanto

$$\int_{-a}^a e^{-x^2}dx = \int_{-a}^0 e^{-x^2}dx + \int_0^a e^{-x^2}dx = 2\int_0^a e^{-x^2}dx$$

y de aqui

$$\int_\infty^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a e^{-x^2}dx = \lim_{a\to\infty} 2\int_0^a e^{-x^2}dx = 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Integrales de Fresnel

$$I = \int_0^\infty \cos x^2 dx \qquad J = \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx$$

Vamos a calcularlas usando la identidad de Euler $e^{-ix^2} = \cos(x^2) - i\operatorname{sen}(x^2)$ tenemos entonces que

$$\int_0^\infty e^{-ix^2} dx = \int_0^\infty \cos x^2 - i \operatorname{sen} x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx - i \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx$$

Trabajaremos la integral de la derecha

$$\underbrace{\int_0^\infty e^{-ix^2} dx}_{Cambio \quad t^2=ix^2 \quad \frac{1}{\sqrt{i}}dt=dx} = \int_0^\infty e^{-t^2} \frac{1}{\sqrt{i}} dt \underbrace{=}_{*} \int_0^\infty e^{-t^2} (\frac{1-i}{\sqrt{2}}) dt = (\frac{1-i}{\sqrt{2}}) \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Por lo tanto

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx - i \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

igualando parte real y parte imaginaria se tiene

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{2}}{4} = \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx$$

(*)Vamos a calcular $\frac{1}{\sqrt{i}}$, tenemos que si $z = \sqrt{i} \Rightarrow z^2 = i$ y si $z = a + ib$ entonces $z^2 = i \Rightarrow (a + ib)^2 = i \Rightarrow a^2 + 2iab - b^2 = i$ igualando partes reales e imaginarias tenemos el sistema $a^2 - b^2 = 0$ y $2ab = 1$ de la primera ecuaciòn tenemos que $a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow (a + b)(a - b) = 0$ por lo que $a = b$ o $a = -b$, nosotros consideraremos $a = b$ y sustituyendo en la segunda ecuaciòn $2ab = 1 \Rightarrow 2b^2 = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y como $a = b$ entonces $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ por lo tanto $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ por lo tanto

$$\frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{1+i} = \frac{\sqrt{2}}{1+i}\frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Calculemos $\int \sqrt{x^2-1}dx$ haciendo el cambio de variable $x = Sec(\theta)$ Tenemos que

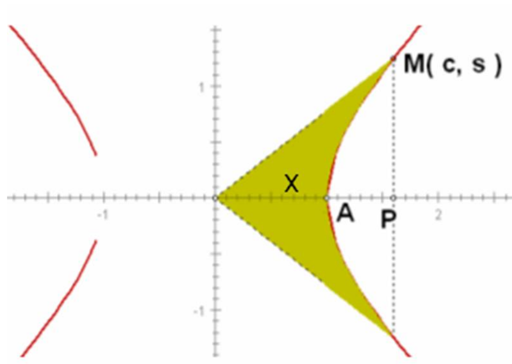
$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \int \sqrt{Sec^2(\theta)-1} Sec\theta Tan(\theta)d\theta = \int \sqrt{Tan^2(\theta)} Sec(\theta)Tan(\theta)d\theta$$

$$= \int Tan(\theta)Sec(\theta)Tan(\theta)d\theta = \int Tan^2(\theta)Sec(\theta)d\theta = \int (Sec^2(\theta) - 1)Sec(\theta)d\theta$$

$$= \int Sec^3(\theta) - Sec(\theta)d\theta = \frac{1}{2}Sec(\theta)Tan(\theta) + \frac{1}{2}Log(Sec(\theta) + Tan(\theta)) - Log(Sec(\theta) + Tan(\theta))$$

$$= \frac{1}{2}Sec(\theta)Tan(\theta) - \frac{1}{2}Log(Sec(\theta) + Tan(\theta)) = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1}) - \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2-1})$$

En la hipérbola equilatera $x^2 - y^2 = 1$ definimos $c = Cosh(x)$ $s = Senh(x)$ y como c,s estan sobre la hipérbola $c^2 - s^2 = 1$



$$Area = "x" = sc - 2\int_1^c \sqrt{x^2-1}dx = sc - c\sqrt{c^2-1} + Log(c+\sqrt{c^2-1})$$
$$= sc - cs + Log(c+\sqrt{c^2-1}) = Log(c+\sqrt{c^2-1})$$

Por lo tanto

$$x = Log(c+\sqrt{c^2-1}) \Rightarrow e^x = c+\sqrt{c^2-1} \Rightarrow e^x - c = \sqrt{c^2-1} \Rightarrow e^{2x} - 2e^x c + c^2 = c^2 - 1$$
$$\Rightarrow e^{2x} - 2e^x c = -1 \Rightarrow e^{2x} + 1 = 2e^x c \Rightarrow \frac{e^{2x}+1}{2e^x} = c \Rightarrow c = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$