1

Integrales Elipticas

Longitud de una Curva

Sea f una función continua en $[a, b]$. Si $\{t_0, t_1, ..., t_n\}$ es una partición de $[a, b]$ tenemos que en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ al aplicar f, la distancia entre ellos es:

$$d((x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))) = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2}$$

Ahora bien si aplicamos el Teorema del Valor medio al intervalo (t_{i-1}, t_i) se tiene que existe $c \in (t_{i-1} t_i)$ tal que

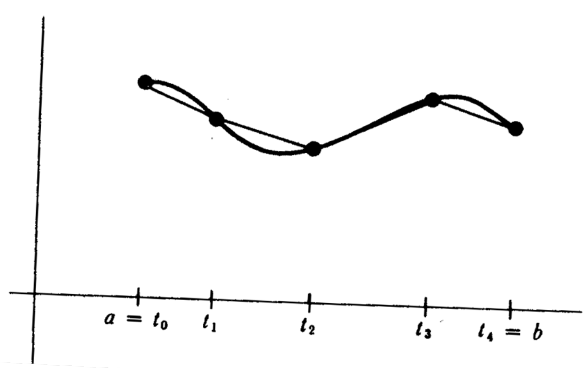
$$\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = f'(c) \quad \Rightarrow \quad f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c)((t_i - t_{i-1})$$

se tiene entonces que

$$\sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f'(c)((t_i - t_{i-1}))^2} = (t_i - t_{i-1})\sqrt{1 + (f'(c))^2}$$

este proceso aplicable a la partición P

$$\ell(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + [f(t_i) - f(t_{i-1})]^2}.$$



nos da una aproximación a la longitud de la grafica de la función, esto es

$$\ell(f, P) \approx \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})\sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \qquad c_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

por lo tanto

$$\ell(f,P)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\sqrt{1+(f'(c_i))^2} \qquad c_i\in(x_{i-1},x_i)$$

este término corresponde a una suma de Riemann, por lo tanto

$$\ell(f,P)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Ecuación Parametrica de la Elipse

Dada la ecuación canonica de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, si hacemos $\cos(t)=\dfrac{x}{a}$ y $\operatorname{sen}(t)=\dfrac{y}{b}$ se tiene

$$\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

y de aqui

$$acos(t)=x \qquad b\operatorname{sen}(t)=y$$

la expresión anterior es la ecuación parametrica de la elipse

Longitud de una curva dada en forma parametrica

para esto trabajamos con la expresión

$$\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

y tenemos que:

$$\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2}\frac{dx}{dt}dt=\int_a^b\sqrt{\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

esta última expresión es la longitud de la curva en forma parametrica.

Longitud de la Elipse

Tenemos que dada la elipse $(a\cos(t),b\operatorname{sen}(t))$ su logitud en un intervalo de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sera:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{d\left(a\cos(t)\right)}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\left(b\operatorname{sen}(t)\right)}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(-a\operatorname{sen}(t)\right)^2+\left(b\cos(t)\right)^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2(t)+b^2\cos^2(t)}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2(t) + b^2(1-\operatorname{sen}^2(t))}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2(t) + b^2 - b^2 \operatorname{sen}^2(t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{b^2-a^2}{b^2} \operatorname{sen}^2(t)\right)}dt$$

$$= b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2-a^2}{b^2} \operatorname{sen}^2(t)}dt \underbrace{=}_{k^2=\frac{b^2-a^2}{b^2}} b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2(t)}dt$$

a la expresión $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2(t)}dt$ se le conoce como integral eliptica de segunda especie

Integrales Elipticas

Definición 1. *A las integrales*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2(t)}} \quad 0<k<1$$

se les conoce como integral eliptica de primer especie
A las integrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2(t)}dt \quad 0<k<1$$

se les conoce como integral eliptica de segunda especie
A las integrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1+n^2\operatorname{sen}^2(t))\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2(t)}} \quad 0<k<1$$

se les conoce como integral eliptica de tercer especie

Vamos a ver un método para aproximar las integrales de primer y segunda especie
dado el binomio de Newton

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}a^{n-4}b^4 + \cdots$$

tenemos que

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}1^{\frac{1}{2}-1}(-x) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}1^{\frac{1}{2}-2}(-x)^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}1^{\frac{1}{2}-3}(-x)^3 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!}1^{n-4}(-x)^4 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{4} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\frac{x^3}{6} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)\frac{x^4}{8} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)\frac{x^5}{10} - \cdots$$

por lo tanto

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{4} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\frac{x^3}{6} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)\frac{x^4}{8} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)\frac{x^5}{10} - \cdots$$

si hacemos $x = k^2\operatorname{sen}^2(t)$ se obtiene

$$\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2(t)} = 1 - \frac{k^2\operatorname{sen}^2(t)}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(k^2\operatorname{sen}^2(t))^2}{4} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\frac{(k^2\operatorname{sen}^2(t))^3}{6} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)\frac{(k^2\operatorname{sen}^2(t))^4}{8} -$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)\frac{(k^2\operatorname{sen}^2(t))^5}{10}-\cdots$$

por lo tanto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2(t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1-\frac{k^2\operatorname{sen}^2(t)}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(k^2\operatorname{sen}^2(t))^2}{4}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\frac{(k^2\operatorname{sen}^2(t))^3}{6}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)\frac{(k^2\operatorname{sen}^2(t))^4}{8}-$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)\frac{(k^2\operatorname{sen}^2(t))^5}{10}-\cdots$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2\operatorname{sen}^2(t)}{2}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(k^2\operatorname{sen}^2(t))^2}{4}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\frac{(k^2\operatorname{sen}^2(t))^3}{6}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)\frac{(k^2\operatorname{sen}^2(t))^4}{8}dt-$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)\frac{(k^2\operatorname{sen}^2(t))^5}{10}dt-\cdots$$

vamos a calcular por separado el valor de cada integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dt=\frac{\pi}{2},\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}k^2\operatorname{sen}^2(t)dt=\frac{k^2\pi}{4},\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}(k^2\operatorname{sen}^2(t))^2dt=\frac{3}{16}\pi k^4,\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}(k^2\operatorname{sen}^2(t))^3dt=\frac{5}{32}\pi k^6$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(k^2\operatorname{sen}^2(t))^4dt=\frac{35}{256}\pi k^8,\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}(k^2\operatorname{sen}^2(t))^5dt=\frac{63}{512}\pi k^{10}$$

por lo tanto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2(t)}dt=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)\frac{k^2\pi}{4}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)\frac{3}{16}\pi k^4-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\right)\frac{5}{32}\pi k^6-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{8}\right)\frac{35}{256}\pi k^8$$

$$-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{10}\right)\frac{63}{512}\pi k^{10}-\cdots$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2\frac{k^6}{5}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)^2\frac{k^8}{7}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}\right)^2\frac{k^{10}}{9}\right)$$

Ejemplo.-Calcula la longitud de la gr*á*fica de la funci*ó*n $\operatorname{sen}(x)$ en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
tenemos que seg*ú*n la f*ó*rmula

$$\ell(f,P)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

se tiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(\cos(x))^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(1-\operatorname{sen}^2(x))}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-\operatorname{sen}^2(x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x)\right)}dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\operatorname{sen}^2(x)}dx\quad en\ \ este\ \ caso\ \ k=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

y usamos nuestra f*ó*rmula y tenemos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+(\cos(x))^2}dx = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4}{3}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6}{5}-\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)^2\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8}{7}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}\right)^2\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}}{9}\right)\approx 1{,}910355219$$

Mediante un proceso analogo se muestra que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2(t)}}dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2k^4+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2k^6+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)^2k^8+\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}\right)^2k^{10}\right)$$

Ejemplo.-Calcular $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}}$tenemos que haciendo el cambio $x = 2\operatorname{sen}(t)$ obtenemos

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}} \underbrace{=}_{\substack{x=2\operatorname{sen}(t)\\ dx=2\cos(t)dt}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(t)dt}{\sqrt{(4-4\operatorname{sen}^2(t))(9-4\operatorname{sen}^2(t))}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(t)dt}{\sqrt{(4(1-\operatorname{sen}^2(t))(9(1-\frac{4}{9}\operatorname{sen}^2(t))}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{2}\cos(t)dt}{\cancel{2}\sqrt{(1-\operatorname{sen}^2(t)(9(1-\frac{4}{9}\operatorname{sen}^2(t))}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)dt}{\sqrt{\cos^2(t)}\sqrt{9(1-\frac{4}{9}\operatorname{sen}^2(t))}} = \left(\frac{1}{3}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\operatorname{sen}^2(t)}}$$

en este caso $k^2 = \dfrac{4}{9} \quad\Rightarrow\quad k = \dfrac{2}{3}$ y usando nuestra f*ó*rmula

$$\left(\frac{1}{3}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\operatorname{sen}^2(t)}} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^6\right)\approx 0{,}600809843$$