1

Funciones Trigonometricas

Un poco de series de Fourier

Ejercicio.- Si f es una función integrable sobre $[-\pi, \pi]$, demostrar que el valor mínimo de

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - a\cos(nx))^2\, dx$$

se alcanza en

$$a = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) - a\cos(nx) dx$$

Demostración. Primero desarrollamos el integrando

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - a\cos(nx))^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2a\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx + a^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx$$

y definimos la función $h(a)$ como

$$h(a) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2a\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx + a^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx$$

ahora vamos a derivar y obtenemos

$$h'(a) = -2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx + 2a\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx$$

para obtener el valor mínimo igualamos la derivada a cero y obtenemos

$$h'(a) = 0 \Leftrightarrow -2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx + 2a\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = a\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx$$

por lo tanto

$$a = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx} \underbrace{=}_{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx=\pi \quad si \quad m=n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

□

Ejercicio.- Si f es una función integrable sobre $[-\pi, \pi]$, demostrar que el valor mínimo de

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - a\,\mathrm{sen}(nx))^2\, dx$$

se alcanza en

$$a = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) - a\,\mathrm{sen}(nx) dx$$

Demostración. Primero desarrollamos el integrando

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-a\operatorname{sen}(nx))^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2a\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}(nx)dx+a^2\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2(nx)dx$$

y definimos la función $h(a)$ como

$$h(a)=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2a\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}(nx)dx+a^2\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2(nx)dx$$

ahora vamos a derivar y obtenemos

$$h'(a)=-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}(nx)dx+2a\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2(nx)dx$$

para obtener el valor mínimo igualamos la derivada a cero y obtenemos

$$h'(a)=0\Leftrightarrow-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}(nx)dx+2a\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2(nx)dx=0\Leftrightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}(nx)dx=a\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2(nx)dx$$

por lo tanto

$$a=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}(nx)dx}{\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2(nx)dx}\underbrace{=}_{\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)dx=\pi\quad si\quad m=n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}(nx)dx$$

□

Definición 1. *Dada la expresión*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\quad en\quad[-\pi,\pi]$$

se le llama serie de Fourier en $[-\pi,\pi]$

Vamos a encontrar el valor de a_0 tenemos que en la expresión

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)$$

vamos a integrar de ambos lados

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos(nx)dx+\int_{-\pi}^{\pi}b_n\operatorname{sen}(nx)dx$$

En esta *última* expresi*ó*n tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx)dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = a_n \left(\frac{\text{sen}(nx)}{nx} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = a_n 0 = 0$$

mientras que

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \,\text{sen}(nx)dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)dx = b_n \left(\frac{-\cos(nx)}{nx} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = b_n 0 = 0$$

por lo tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = a_0\pi \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

En la serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \,\text{sen}(nx) \quad en \quad [-\pi, \pi]$$

a los coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)dx$$

se les llama coeficientes de Fourier.
Dicha serie constituye una aproximaci*ó*n de la funci*ó*n f en $[-\pi, \pi]$

Integral de Dirichlet

Ejemplo: Evaluar $\int_0^{\infty} \frac{senx}{x} dx$

a) Primero mostrando que $\int_0^{\infty} e^{-xy}dy = \frac{1}{x}$ si $x > 0$

tenemos que $\int_0^{\infty} e^{-xy}dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n} e^{-xy}dy = \lim_{n\to\infty} \frac{-e^{-xy}}{x}\Big|_o^n = \lim_{n\to\infty} \frac{-e^{-xy}}{x} + \frac{e^{-x(o)}}{x} = \frac{1}{x}$

b) Use integraci*ó*n por partes para mostrar que $\int_0^{\infty} -e^{-xy} senx dx = \frac{1}{1+y^2}$ si $y > 0$

$$u = senx \qquad dv = e^{-xy}$$
$$du = cos(x) \qquad v = \frac{e^{-xy}}{y}$$

tenemos que $\int_0^{\infty} e^{-xy} sen(x)dx = \frac{-e^{-xy}sen(x)}{y} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-xy}}{y} cos(x)dx =$

$$u = cos(x) \qquad dv = e^{-xy}$$
$$du = -sen(x) \qquad v = \frac{-e^{-xy}}{y}$$

$$= \frac{-e^{-xy} sen(x)}{y} + \frac{1}{y}\left[cos(x)\left(\frac{-e^{-xy}}{y}\right) - \int \frac{e^{-xy}}{y} sen(x)dx\right] = \frac{-e^{-xy} sen(x)}{y} + \frac{1}{y^2} cos(x)(-e^{-xy}) - \frac{1}{y^2}\int e^{-xy} sen(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \int e^{-xy} sen(x)dx \left[1 + \frac{1}{y^2}\right] = \frac{-e^{-xy} sen(x)}{y} + \frac{cos(x)e^{-xy}}{y^2}$$

$$\therefore \quad \int e^{-xy} sen(x)dx = \left(\frac{y^2}{1+y^2}\right)\left[\frac{-e^{-xy} sen(x)}{y} + \frac{cos(x)e^{-xy}}{y^2}\right] =$$

$$\underbrace{\frac{-e^{-xy} sen(x)}{y}\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right)}_{\text{en } x=0 \text{ da } 0 \text{ y en } x\to\infty \text{ da } 0} + \underbrace{\frac{cos(x)(-e^{-xy})}{y^2}\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right)}_{\text{en } x\to\infty \text{ da } 0 \text{ y en } x=0 \text{ da } \frac{1}{1+y^2}}$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-xy} sen(x)dx = \frac{1}{1+y^2} \text{ si } \ y > 0$$

c) Finalmente

$$\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x}dx = \int_0^\infty \frac{1}{x} sen(x)dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xy} sen(x)dydx = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo.-Vamos a calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{x^2}dx$ para esto vamos a dar una expresión equivalente a $\operatorname{sen}^3(x)$ tenemos que

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x) \ \Rightarrow \ \operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(2x+x) = \operatorname{sen}(2x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(2x) =$$

$$2\operatorname{sen}(x)\cos^2(x) + (\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x))\operatorname{sen}(x) = 3\operatorname{sen}(x)\cos^2(x) - \operatorname{sen}^3(x) \ \Rightarrow \ \operatorname{sen}^3(x) = 3\operatorname{sen}(x)\cos^2(x) - \operatorname{sen}(3x)$$

$$= 3\operatorname{sen}(x)(1 - \operatorname{sen}^2(x)) - \operatorname{sen}(3x) = 3\operatorname{sen}(x) - 3\operatorname{sen}^3(x) - \operatorname{sen}(3x) \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}^3(x) = 3\operatorname{sen}(x) - 3\operatorname{sen}^3(x) - \operatorname{sen}(3x) \ \Rightarrow \ 4\operatorname{sen}^3(x) = 3\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(3x) \ \Rightarrow \ \operatorname{sen}^3(x) = \frac{3\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(3x)}{4}$$

por lo tanto

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{x^2}dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{3\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(3x)}{x^2}dx = \frac{1}{4}\lim_{r\to 0}\int_r^\infty \frac{3\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(3x)}{x^2}dx =$$

$$\frac{1}{4}\lim_{r\to 0}\left(3\int_r^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}dx - \int_r^\infty \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x^2}dx\right)$$

para la segunda integral se tiene

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x^2}dx \underbrace{=}_{\substack{t=3x \ \Rightarrow \ \frac{t}{3}=x \ \Rightarrow \ \frac{dt}{3}=dx \\ x=r \ \Rightarrow \ t=3r \ \ y \ \ x=\infty \ \Rightarrow \ t=\infty}} 3\int_{3r}^\infty \frac{\operatorname{sen}(t)}{t^2}dt$$

por lo tanto

$$\frac{1}{4}\lim_{r\to 0}\left(3\int_r^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}dx - \int_r^\infty \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x^2}dx\right) = \frac{1}{4}\lim_{r\to 0}\left(3\int_r^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}dx - 3\int_{3r}^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}dx\right)$$

$$= \frac{3}{4}\lim_{r\to 0}\left(\int_r^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}dx - \int_{3r}^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}dx\right) = \frac{3}{4}\lim_{r\to 0}\left(\int_r^{3r} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}dx\right)$$

en esta *ú*ltima integral aplicamos el teorema del valor medio y obtenemos

$$\int_r^{3r} \frac{\text{sen}(x)}{x^2}dx = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}\int_r^{3r} \frac{dx}{x} \quad con \quad r < \alpha < 3r$$

en consecuencia

$$\frac{3}{4}\lim_{r\to 0}\left(\int_r^{3r} \frac{\text{sen}(x)}{x^2}dx\right) = \frac{3}{4}\lim_{r\to 0}\left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}\int_r^{3r} \frac{dx}{x} \quad con \quad r < \alpha < 3r\right) =$$

$$\frac{3}{4}\lim_{r\to 0}\left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}\left(\log(x)\Big|_r^{3r}\right)\right) = \frac{3}{4}\lim_{r\to 0}\left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}\left(\log(3r)-\log(r)\right)\right) = \frac{3}{4}\lim_{r\to 0}\left(\cancel{\frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}}\left(\log(3)\right)\right) = \frac{3}{4}\log(3)$$