1

Métodos de Integración

Método por partes rápida

Hay muchas integrales que se resuelven utilizando el método de integración por partes aplicándolo varias veces. Ahora veremos un método rápido y sencillo para hacer estas integrales.
Probremos que

$$\int fg = fg_1 - f'g_2 + \cdots + (-1)^{n-1} f^{n-1} g_n + (-1)^n \int f^n g_n dx$$

donde

$$f^{i+1} = \frac{d}{dx} f^i \quad y \quad g_{i+1} = \int g_i dx$$

La cual es solamente una aplicación sucesiva del método de integración por partes y que probaremos usando inducción

Demostración. Si $n = 2$ entonces para $\displaystyle\int fg\ dx$ utilizamos el método de integración por partes

$$\int fg\ dx \underbrace{=}_{\substack{u=f \quad dv=g\ dx \\ du=f'dx \quad v=\int g dx}} fg_1 - \int f'g_1 dx \underbrace{=}_{\substack{u=f' \quad dv=g_1\ dx \\ du=f^2dx \quad v=\int g_1=g_2 dx}} fg_1 - f'g_2 + \int f^2 g_2 dx$$

supongamos cierta la fórmula para n=k esto es la hipótesis de inducción

$$\int fg\ dx = fg_1 - f'g_2 + \cdots + (-1)^{k-1} f^{k-1} g_k + (-1)^k \int f^k g_k dx$$

probaremos ahora el resultado para n=k+1, es decir,

$$\int fg\ dx = fg_1 - f'g_2 + \cdots + (-1)^{k-1} f^{k-1} g_k + (-1)^k f^k g_{k+1} + (-1)^{k+1} \int f^{k+1} g_{k+1} dx$$

Para ello basta con integrar por partes la última integral que aparece en la hipòtesis de inducción:

$$\int f^k g_k dx \underbrace{=}_{\substack{u=f^k \quad dv=g_k\ dx \\ du=f^{k+1}dx \quad v=\int g_k=g_{k+1}dx}} f^k g_{k+1} - \int f^{-k+1} g_{k+1} dx$$

por lo tanto

$$\int fg\ dx = fg_1 - f'g_2 + \cdots + (-1)^{k-1} f^{k-1} g_k + (-1)^k \int f^k g_k dx =$$

$$fg_1 - f'g_2 + \cdots + (-1)^{k-1} f^{k-1} g_k + (-1)^k \left(f^k g_{k+1} - \int f^{-k+1} g_{k+1} dx \right) =$$

$$\int fg\ dx = fg_1 - f'g_2 + \cdots + (-1)^{k-1} f^{k-1} g_k + (-1)^k f^k g_{k+1} + (-1)^{k+1} \int f^{k+1} g_{k+1} dx$$

$\square$

Ejemplo.-Calcular $\int x^5 \cos x dx$

Para esto tenemos que

$f = x^5$	$g_1 = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x$	$(-1)^0 f g_1 = x^5 \operatorname{sen} x$
$f' = 5x^4$	$g_2 = \int g_1 = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$	$(-1)^1 f' g_2 = (-1)^1 5x^4(-\cos x) = 5x^4 \cos x$
$f^2 = 20x^3$	$g_3 = \int g_2 = \int -\cos x dx = -\operatorname{sen} x$	$(-1)^2 f^2 g_3 = (-1)^2(20x^3)(-\operatorname{sen} x) = -20x^3 \operatorname{sen} x$
$f^3 = 60x^2$	$g_4 = \int g_3 = \int -\operatorname{sen} x dx = \cos x$	$(-1)^3 f^3 g_4 = (-1)^3(60x^2)(\cos x) = -60x^2 \cos x$
$f^4 = 120x$	$g_5 = \int g_4 = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x$	$(-1)^4 f^4 g_5 = (-1)^4(120x)(\operatorname{sen} x) = 120x \operatorname{sen} x$
$f^5 = 120$	$g_6 = \int g_5 = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$	$(-1)^5 f^5 g_6 = (-1)^5(120)(-\cos x) = 120 \cos x$

por lo tanto

$$\int x^5 \cos x dx = x^5 \operatorname{sen} x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \operatorname{sen} x - 60x^2 \cos x + 120x \operatorname{sen} x + 120 \cos x + C$$

Este método puede utilizarse cuando el integrando es un producto de la forma

$$x^n \cos x \quad \acute{o} \quad x^n \operatorname{sen} x$$

Pero no es indispensable que aparezca la función seno o coseno en el producto, basta con que la función que hará el papel de g sea facilmente integrable tantas veces como se requiera.