1

Métodos de Integración

Integración por fracciones parciales

Consideremos la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde P, Q son polinomios. Si derivamos una función racional obtenemos una funciòn racional. Si integramos una función racional puede resultar una función NO racional. Por ejemplo

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad y \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

Definición 1. *Una función racional* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador se llama función racional propia.*

Si $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional impropia, se puede expresar como suma de un polinomio y una función racional propia:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)}$$

donde el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $g(x)$.
Por ejemplo

$$\frac{x^{4+5x}}{x^2-3x-1} = x^2 + 3x + 10 + \frac{38x+10}{x^2-3x-1}$$

Como toda función racional impropia se puede expresar como la suma de un polinomio y una función racional propia, sólo estudiaremos las funciones racionales propias.
Un teorema general de Álgebra dice que toda función racional propia se puede expresar como suma finita de fracciones de la forma

$$\frac{A}{(x+a)^k} \quad y \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)}$$

con $k, m \in \mathbb{N}$, A, B, C, a, b, c constantes y $b^2 - 4ac < 0$, es decir, el polinomio $x^2 + bx + c$ no tiene raíces reales, osea, es un polinomio irreducible.
Cuando una función racional se expresa de la manera antes indicada, se dice que se ha descompuesto en fracciones simples.
Para integrar una integral racional propia analizaremos cuatro casos

Caso 1: El denominador es un producto de factores lineales distintos

Si $g(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$ el producto de n factores distintos, entonces la combinación lineal

$$\frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-x_n)}$$

se reduce a una única fracción con $g(x)$ como común denominador, siendo el numerador un polinomio de grado menor que n que contiene a las A_i con $i = 1, 2, \cdots, n$
Por tanto, si podemos encontrar las A_i de manera que este numerador sea igual a $f(x)$, se tiene que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x - x_n)}$$

y

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{n} A_i \ln|x - x_i| + C$$

Ejemplo.- Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-3)(x+2)}$
Para esto se tiene en fracciones

$$\frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

si multiplicamos por $(x-3)(x+2)$ ambos miembros de la igualdad se obtiene

$$(x-3)(x+2)\left(\frac{1}{(x-3)(x+2)}\right) = (x-3)(x+2)\left(\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}\right) \Rightarrow 1 = A(x+2) + B(x-3)$$

ahora bien en la expresión

$$1 = A(x+2) + B(x-3)$$

si hacemos x=3 se obtiene

$$1 = A(3+2) = 5A \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

si hacemos x=-2 se obtiene

$$1 = B(-2-3) = -5B \Rightarrow B = -\frac{1}{5}$$

por lo tanto

$$\int \frac{dx}{(x-3)(x+2)} = \int \left(\frac{\frac{1}{5}}{x-3} + \frac{-\frac{1}{5}}{x+2}\right) dx = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{5}\ln|x-3| - \frac{1}{5}\ln|x+2| + C$$

Ejemplo.- Calcular $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx$
Nuestro primer trabajo consiste en factorizar el denominador

$$x^3 + x^2 - 2x = x\left(x^2 + x + 2\right) = x(x+2)(x-1)$$

y se tiene que en fracciones

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{2x^2 + 5x - 1}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$$

si multiplicamos por $x(x+2)(x-1)$ ambos miembros de la igualdad se obtiene

$$x(x+2)(x-1)\left(\frac{2x^2 + 5x - 1}{x(x+2)(x-1)}\right) = x(x+2)(x-1)\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}\right) \Rightarrow 1 = A(x+2)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+2)$$

por lo tanto

$$2x^2 + 5x - 1 = A(x+2)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+2)$$

ahora bien en la expresión

$$2x^2 + 5x - 1 = A(x+2)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+2)$$

si hacemos x=-2 se obtiene

$$-3 = B(6) \ \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

si hacemos x=0 se obtiene

$$-1 = A(-2) = -2A \ \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

si hacemos x=1 y tomando los valores hallados para A y B se obtiene

$$6 = C(3) \ \Rightarrow C = 2$$

por lo tanto

$$\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+2} + \frac{2}{x-1} \right) dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2} + 2\int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + 2\ln|x-1| + C$$

Caso 2: El denominador es un producto de factores lineales alguno repetido

Ejemplo.- Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}dx$

se tiene que en fracciones

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

si multiplicamos por $(x-1)(x+1)^2$ ambos miembros de la igualdad se obtiene

$$(x-1)(x+1)^2 \left(\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2} \right) = (x-1)(x+1)^2 \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \right) \ \Rightarrow$$

$$x^2 + 2x + 3 = A(x+1)^2(x-1) + B(x-1)(x+1) + C(x+1)$$

ahora bien en la expresión

$$x^2 + 2x + 3 = A(x+1)^2(x-1) + B(x-1)(x+1) + C(x+1)$$

si hacemos x=1 se obtiene

$$6 = A(4) \ \Rightarrow A = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

si hacemos x=-1 se obtiene

$$2 = C(-2) \ \Rightarrow C = -1$$

si hacemos x=0 y tomando los valores hallados para A y B se obtiene

$$3 = \frac{3}{2} - B + 1 \ \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}dx = \int \left(\frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} \right) dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

Caso 3: El denominador es un producto de factores cuadraticos distintos

Ejemplo.- Calcular $\int \frac{x^2-1}{(x)(x^2+x+1)}dx$
se tiene que en fracciones

$$\frac{x^2-1}{(x)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

si multiplicamos por $(x)(x^2+x+1)$ ambos miembros de la igualdad se obtiene

$$(x)(x^2+x+1)\left(\frac{x^2-1}{(x)(x^2+x+1)}\right) = (x)(x^2+x+1)\left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$x^2-1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x)$$

Desarrollando

$$x^2-1 = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx = (A+B)x^2 + (A+C)x + A$$

por lo tanto

$$x^2-1 = (A+B)x^2 + (A+C)x + A$$

donde obtenemos el sistema de ecuaciones $A+B=1,\ A+C=0$ y $A=-1$ Al resolver se obtiene $A=-1,\ B=2,\ C=1$ por lo tanto

$$\int \frac{x^2-1}{(x)(x^2+x+1)}dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx = -\ln|x| + \ln|x^2+x+1| + C$$