1

Métodos de Integración

Integración por fracciones parciales

Caso 4: El denominador tiene factores cuadráticos alguno repetido

Si en la descomposición de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en fracciones simples tiene en primer lugar factores lineales, entonces aparecerán primero los factores de la forma

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

y en segundo lugar, si un factor cuadrático irreducible se repite m-veces, entonces se puede descomponer en una suma de términos de la forma

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k x + C_k}{(x^2+bx+c)^k}$$

donde cada numerador es lineal. Asi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{A_k}{(x-a)^k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k x + C_k}{(x^2+bx+c)^k}$$

Ejemplo.- Calcular $\displaystyle\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx$
tenemos que en fracciones

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+2x+3)} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+3)^2}$$

de donde

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8 = A\left((x^2+2x+3)^2\right) + (Bx+C)\left(x^2+2x+3\right)(x+1) + (Dx+E)(x+1)$$

$$= A\left((x^4+4x^3+10x^2+12x+9)\right) + B\left((x^4+3x^3+5x^2+3x)\right) + C\left((x^3+3x^2+5x+3)\right) + D\left(x^2+x\right) + E(x+1)$$

$$= (A+B)x^4 + (4A+3B+C)x^3 + (10A+5B+3C+D)x^2 + (12A+3B+5C+D+E)x + 9A+3C+E$$

En la expresión

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+2x+3)} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+3)^2}$$

si hacemos x=-1 se obtiene

$$1-4+11-12+8=A(1-2+3)^2 \;\Rightarrow\; 4=4A \;\Rightarrow\; A=1$$

mientras que en el sistema

$A+B=1\quad 4A+3B+C=4\quad 10A+5B+3C+D=11\quad 12A+3B+5C+D+E=12\quad 9A+3C+E=8$

tomando A=1 se tiene

$$A+B=1 \;\Rightarrow\; 1+B=1 \;\Rightarrow\; B=0$$

tomando A=1, B=0

$$4A+3B+C=4 \;\Rightarrow\; 4+C=4 \;\Rightarrow\; C=0$$

tomando A=1, B=0, C=0 se tiene

$$10A+5B+3C+D=11 \;\Rightarrow\; 10+D=11 \;\Rightarrow\; D=1$$

tomando A=1, B=0, C=0, D=1 se tiene

$$12A+3B+5C+D+E=12 \;\Rightarrow\; 12+1+E=12 \;\Rightarrow\; E=-1$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx=\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx=\ln|x+1|+\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$$

Vamos a calcular $\displaystyle\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$ tenemos que

$$\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx=\int\frac{x+1-1-1}{(x^2+2x+3)^2}dx=\int\frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}dx-\int\frac{2}{(x^2+2x+3)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)}{(x^2+2x+3)^2}dx-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{1}{2}\frac{-1}{x^2+2x+3}-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$$

Para calcular la integral $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$
expresamos el denominador de la siguiente manera

$$(x^2+2x+3)^2=(x^2+2x+1-1+3)^2=\big((x+1)^2+2\big)^2$$

por lo tanto

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\int\frac{dx}{\big((x+1)^2+2\big)^2}\underbrace{=}_{\substack{x+1=\sqrt{2}\tan t\\ dx=\sqrt{2}\sec^2 t\,dt}}\int\frac{\sqrt{2}\sec^2 t dt}{\big((\sqrt{2}\tan t)^2+2\big)^2}=\int\frac{\sqrt{2}\sec^2 t dt}{2^2\sec^4 t}=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{dt}{\sec^2 t}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\cos^2 t\ dt=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{1+\cos 2t}{2}\ dt=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(t+\frac{\operatorname{sen}2t}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}(t\cos t\operatorname{sen}t)$$

tenemos que de la sustitución

$$x+1=\sqrt{2}\tan t \;\Rightarrow\; \frac{x+1}{\sqrt{2}}=\tan t \;\Rightarrow\; \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)=t$$

ahora bien

$$\cos t=\cos\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

necesitamos encontrar expresiones para $\operatorname{sen}(\arctan x)$ y $\cos(\arctan x)$ y para ello hacemos $y=\arctan x$ y tenemos que

$$y=\arctan x \;\Rightarrow\; \tan y=x \;\Rightarrow\; \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}=x \;\Rightarrow\; x=\frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} \;\Rightarrow\; x\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}=\operatorname{sen} y$$

$$\Rightarrow\; x^2(1-\operatorname{sen}^2 y)=\operatorname{sen}^2 y \;\Rightarrow\; x^2-x^2\operatorname{sen}^2 y=\operatorname{sen}^2 y \;\Rightarrow\; x^2=x^2\operatorname{sen}^2 y+\operatorname{sen}^2 y \;\Rightarrow\; x^2=(x^2+1)\operatorname{sen}^2 y$$

$$\Rightarrow\; \frac{x^2}{x^2+1}=\operatorname{sen}^2 y \;\Rightarrow\; \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\operatorname{sen} y$$

por lo tanto

$$\operatorname{sen}(\arctan x)=\operatorname{sen} y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

y en consecuencia

$$\cos(\arctan x)=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\arctan x)}=\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}=\sqrt{\frac{x^2+1-x^2}{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

sustituimos el valor de t y obtenemos

$$\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)=t \;\Rightarrow\; \cos\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\cos t \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(x+1)^2}{2}}}=\cos t \;\Rightarrow\; \frac{2}{\sqrt{2x^2+4x+6}}=\cos t$$

y también

$$\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)=t \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\operatorname{sen} t \;\Rightarrow\; \frac{\frac{x+1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1+\frac{(x+1)^2}{2}}}=\operatorname{sen} t \;\Rightarrow\; \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\operatorname{sen} t$$

finalmente

$$\frac{\sqrt{2}}{8}(t\cos t\operatorname{sen} t)=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2x^2+4x+6}}\right)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\right)$$

y la integral resulta

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+3}-2\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2x^2+4x+6}}\right)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\right)$$