1

Métodos de Integración

Método de Euler

Para resolver integrales de la forma

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}dx$$

El matemático suízo Leonard Euler, ideó unas sustituciones que permiten transformar estas integrales a integrales de funciones racionales.

Primera sustitución del método de Euler

Para calcular la integral

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}dx$$

donde $a > 0$ hacemos la siguiente sustitución:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x + t$$

Hay que considerar sólo un signo, cualquiera de los dos, ya que se obtiene el mismo resultado.
Vamos a usar álgebra de la igualdad para despejar x

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{ax^2 + bx + c}\right)^2 = \left(\sqrt{a}x + t\right)^2 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a}xt + t^2$$

$$\Rightarrow \quad bx - 2\sqrt{a}xt = t^2 - c \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}$$

de donde

$$dx = \frac{2t(b - 2\sqrt{a}t) - (-2\sqrt{a})(t^2 - c)}{(b - 2\sqrt{a}t)^2}dt = \frac{2tb - 2\sqrt{a}t^2 - 2\sqrt{a}c}{(b - 2\sqrt{a}t)^2}$$

por lo tanto

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t \quad \Rightarrow \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\left(\frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}\right) + t \quad \Rightarrow \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{-\sqrt{a}t^2 - \sqrt{a}c + tb}{b - 2\sqrt{a}t}$$

por lo tanto

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}dx = \int \left(\frac{-\sqrt{a}t^2 - \sqrt{a}c + tb}{b - 2\sqrt{a}t}\right)\left(\frac{2tb - 2\sqrt{a}t^2 - 2\sqrt{a}c}{(b - 2\sqrt{a}t)^2}\right)dt = 2\int \frac{(-\sqrt{a}t^2 - \sqrt{a}c + tb)^2}{(b - 2\sqrt{a}t)^3}dt$$

Las expresiones que se obtienen son racionales y podemos utilizar el método de fracciones parciales para calcular las integrales

Ejemplo.-Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$
Para esto hacemos la sustitución

$$\sqrt{x^2+3} = x+t \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{x^2+3}\right)^2 = (x+t)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+3 = x^2+2xt+t^2 \quad \Rightarrow \quad -2xt = t^2-3$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{3-t^2}{2t}$$

de donde

$$dx = \frac{-2t(2t)-2(3-t^2)}{(2t)^2} = \frac{-2t^2-6}{4t^2} = -\frac{t^2+3}{2t^2}$$

Así

$$\sqrt{x^2+3} = x+t \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+3} = \frac{3-t^2}{2t}+t \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+3} = \frac{3+t^2}{2t}$$

De donde la integral es:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} = \int \frac{1}{\left(\frac{3+t^2}{2t}\right)}\left(-\frac{t^2+3}{2t^2}\right)dt = -\int \frac{1}{t}dt = -\ln|t|+C = -\ln|\sqrt{x^2+3}-x|+C$$