1

Métodos de Integración

Método de Euler

Para resolver integrales de la forma
$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$$
El matemático suízo Leonard Euler, ideó unas sustituciones que permiten transformar estas integrales a integrales de funciones racionales.

Segunda sustitución del método de Euler

Para calcular la integral
$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$$
donde $c>0$ hacemos la siguiente sustitución:
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$$
Hay que considerar sólo un signo, cualquiera de los dos, ya que se obtiene el mismo resultado.
Vamos a usar álgebra de la igualdad para despejar x
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx-\sqrt{c} \quad\Rightarrow\quad \left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)^2=\left(tx-\sqrt{c}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad ax^2+bx+c=t^2x^2-2\sqrt{c}xt+c$$
$$\Rightarrow\quad ax^2+bx-t^2x^2+2\sqrt{c}xt=0 \quad\Rightarrow\quad (a-t^2)x^2+(b+2t\sqrt{c})x=0 \quad\Rightarrow\quad x\left((a-t^2)x+(b+2t\sqrt{c})\right)=0$$
$$\Rightarrow\quad x=0 \ \text{ó}\ (a-t^2)x+(b+2t\sqrt{c})=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{2\sqrt{c}t+b}{t^2-a}$$
de donde
$$dx=\frac{2\sqrt{c}(t^2-a)-2t(2\sqrt{c}t+b)}{(t^2-a)^2}dt=\frac{2\sqrt{c}t^2-2\sqrt{c}a-4\sqrt{c}t^2-2tb}{(t^2-a)^2}dt=\frac{-2\sqrt{c}t^2-2\sqrt{c}a-2tb}{(t^2-a)^2}dt$$
por lo tanto
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx-\sqrt{c} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(\frac{2\sqrt{c}t+b}{t^2-a}\right)-\sqrt{c} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2+\sqrt{c}a+tb}{t^2-a}$$
por lo tanto
$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx=\int\left(\frac{2\sqrt{c}t+b}{t^2-a}\right)\left(\frac{-2\sqrt{c}t^2-2\sqrt{c}a-2tb}{(t^2-a)^2}\right)dt=-2\int\frac{\left(\sqrt{c}t^2+\sqrt{c}a+tb\right)^2}{\left(t^2-a\right)^3}dt$$

Las expresiones que se obtienen son racionales y podemos utilizar el método de fracciones parciales para calcular las integrales

Ejemplo.-Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8-x-x^2}}$

Para esto hacemos la sustitución

$$\sqrt{8-x-x^2} = tx+\sqrt{8} \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{8-x-x^2}\right)^2 = (tx+\sqrt{8})^2 \quad \Rightarrow \quad 8-x-x^2 = t^2x^2+2\sqrt{8}xt+8 \quad \Rightarrow$$

$$0 = t^2x^2+x^2+2\sqrt{8}tx+x \quad \Rightarrow \quad 0 = (t^2+1)x^2+(2\sqrt{8}t+1)x$$

de donde

$$x = 0 \qquad \acute{o} \qquad x = \frac{-2\sqrt{8}t-1}{t^2+1}$$

por tanto

$$dx = \frac{-2\sqrt{8}(t^2+1)-2t(-2\sqrt{8}t-1)}{(t^2+1)^2}dt = \frac{-2\sqrt{8}t^2-2\sqrt{8}+4\sqrt{8}t^2+2t}{(t^2+1)^2}dt = \frac{2\sqrt{8}t^2+2t-2\sqrt{8}}{(t^2+1)^2}dt$$

Así

$$\sqrt{8-x-x^2} = tx+\sqrt{8} = t\left(\frac{-2\sqrt{8}t-1}{t^2+1}\right)+\sqrt{8} = \frac{-2\sqrt{8}t^2-t+\sqrt{8}t^2+\sqrt{8}}{t^2+1} = \frac{-\sqrt{8}t^2-t+\sqrt{8}}{t^2+1}$$

De donde la integral es:

$$\int \sqrt{8-x-x^2}\ dx = \int \frac{\frac{2\sqrt{8}t^2+2t-2\sqrt{8}}{(t^2+1)^2}}{\frac{-\sqrt{8}t^2-t+\sqrt{8}}{t^2+1}}dt = -2\int \frac{\frac{-\sqrt{8}t^2-t+\sqrt{8}}{(t^2+1)^2}}{\frac{-\sqrt{8}t^2-t+\sqrt{8}}{t^2+1}}dt = -2\int \frac{1}{t^2+1}dt = -2\arctan t + C$$

Despejando t de la expresión

$$\sqrt{8-x-x^2} = tx+\sqrt{8}$$

se obtiene

$$t = \frac{\sqrt{8-x-x^2}-\sqrt{8}}{x}$$

por lo tanto

$$\int \sqrt{8-x-x^2}\ dx = -2\arctan t + C = -2\arctan\left(\frac{\sqrt{8-x-x^2}-\sqrt{8}}{x}\right) + C$$