1

Métodos de Integración

Método de Euler

Para resolver integrales de la forma

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$$

El matemático suízo Leonard Euler, ideó unas sustituciones que permiten transformar estas integrales a integrales de funciones racionales.

Tercera sustitución del método de Euler

Para calcular la integral

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$$

si ax^2+bx+c tiene como raíces reales r_1 y r_2 siendo $r_1 \neq r_2$, entonces escribimos

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-r_1)t$$

Como r_1 y r_2 son raíces de ax^2+bx+c se tiene que

$$\sqrt{a(x-r_1)(x-r_2)} = (x-r_1)t$$

despejando a x se obtiene

$$\sqrt{a(x-r_1)(x-r_2)} = (x-r_1)t \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{a(x-r_1)(x-r_2)}\right)^2 = ((x-r_1)t)^2 \;\Rightarrow\; a(x-r_1)(x-r_2) = (x-r_1)^2t^2$$

$$\Rightarrow\; a(x-r_2) = (x-r_1)t^2 \;\Rightarrow\; ax - xt^2 = ar_2 - r_1t^2 \;\Rightarrow\; x = \frac{ar_2 - r_1t^2}{a-t^2}$$

de donde

$$dx = \frac{-2r_1t(a-t^2)-(-2t)(ar_2-r_1t^2)}{(a-t^t)^2}dt = \frac{-2r_1ta+2tar_2}{(a-t^2)^2}dt = \frac{2at(r_2-r_1)}{(a-t^2)^2}dt$$

por lo tanto

$$\sqrt{a(x-r_1)(x-r_2)} = (x-r_1)t = \left(\frac{ar_2-r_1t^2}{a-t^2} - r_1\right)t = \frac{at(r_1-r_2)}{t^2-a}$$

por lo tanto

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx = \int \left(\frac{at(r_1-r_2)}{t^2-a}\right)\left(\frac{2at(r_2-r_1)}{(a-t^2)^2}\right)dt = 2\int \frac{a^2t^2(r_1-r_2)^2}{(t^2-a)^3}dt = 2a^2(r_1-r_2)^2\int \frac{t^2}{(t^2-a)^3}dt$$

Las expresiones que se obtienen son racionales y podemos utilizar el método de fracciones parciales para calcular las integrales

Ejemplo.-Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$

Encontramos las raíces de x^2-1, es decir,

$$x^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)(x-1)=0$$

entonces las raíces son $r_1=1$ y $r_2=-1$. Si elegimos r_2 hacemos la sustitución

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{(x-1)(x+1)}=(x+1)t \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{(x-1)(x+1)}\right)^2=((x+1)t)^2 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x+1)=(x+1)^2t^2 \quad \Rightarrow$$

$$x-1=(x+1)t^2 \quad \Rightarrow \quad x-xt^2=t^2+1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{t^2+1}{1-t^2}$$

por tanto

$$dx=\frac{2t(1-t^2)-(-2t)(t^2+1)}{(1-t^2)^2}dt=\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt$$

Así

$$\sqrt{(x-1)(x+1)}=(x+1)t=\left(\frac{t^2+1}{1-t^2}+1\right)t=\frac{2t}{1-t^2}$$

De donde la integral es:

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}\,dx=\int \frac{1}{\left(\frac{t^2+1}{1-t^2}-\frac{2t}{1-t^2}\right)}\left(\frac{4t}{(1-t^2)^2}\right)dt=\int \frac{4t}{(1-t)^2(1-t^2)}dt=4\int \frac{t}{(1-t)^3(1+t)}dt$$

Vamos a resolver esta última integral usando fracciones parciales

$$\int \frac{t}{(1-t)^3(1+t)}dt$$

en fracciones se tiene

$$\frac{t}{(1-t)^3(1+t)}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{(1-t)^2}+\frac{C}{(1-t)^3}+\frac{D}{1+t}$$

de donde

$$t=A(1-t)^2(1+t)+B(1-t)(1+t)+C(1+t)+D(1-t)^3$$

si $t=1$ se tiene $1=2C$ por tanto $C=\dfrac{1}{2}$

si $t=-1$ se tiene $-1=D(1-(-1))^3=8D$ por tanto $D=\dfrac{-1}{8}$

Así tenemos

$$t=A(1-t)^2(1+t)+B(1-t)(1+t)+\frac{1}{2}(1+t)-\frac{1}{8}(1-t)^3$$

$$t=A(t^3-t^2-t+1)+B(1-t^2)+\frac{1}{2}(1+t)-\frac{1}{8}(1-3t+3t^2-t^3)$$

$$t = \left(A + \frac{1}{8}\right)t^3 + \left(-A - B - \frac{3}{8}\right)t^2 + \left(-A + \frac{7}{8}\right)t + A + B + \frac{3}{8}$$

y obtenemos el sistema

$$A + \frac{1}{8} = 0 \qquad -A - B - \frac{3}{8} = 0 \qquad -A + \frac{7}{8} = 1 \qquad A + B + \frac{3}{8} = 0$$

de $A + \frac{1}{8} = 0 \quad \Rightarrow A = \frac{-1}{8}$
sustituyendo, este valor en la segunda

$$\frac{1}{8} - B = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{4}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}} &= 4\left(-\frac{1}{8}\int \frac{dt}{1-t} - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1-t)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(1-t)^3} - \frac{1}{8}\int \frac{dt}{1+t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{(1-t)^{-1}}{-1} - 2\frac{(1-t)^{-2}}{-2} - \frac{1}{2}\ln|1+t| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| - \frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} + C\end{aligned}$$

como

$$t = \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x+1} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

entonces

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 - \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x+1} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 + \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x+1} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right| - \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x+1} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} + \frac{1}{(1 - \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x+1} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}})^2} + C$$